FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trabajo Fin de Grado

Estudio de la Transformada de Laplace

Vanessa Mª Motero Contioso

Dirigido por:
Dña. María de los Ángeles Rodríguez Bellido

2018

A mis padres, por permitirme ser parte de su orgullo y ayudarme a crecer.
A mi familia, por el apoyo mostrado de todas las maneras posibles.
A mi tutora, por el tiempo de dedicación y los valiosos consejos.
A mis amigos, por compartir los buenos y malos momentos, y porque sin ellos no hubiera podido llegar a estar donde estoy.
Y por último y no menos importante, a todo aquel que comparte conmigo el increíble mundo que ofrecen las Matemáticas.

Resumen

En la actualidad, podemos encontrar diversas situaciones cuyo comportamiento puede ser modelado y estudiado a través de las ecuaciones diferenciales. Lejos de ser un problema puramente matemático, las ecuaciones diferenciales son usadas por físicos, biólogos, ingenieros, y científicos en general para entender problemas de algún determinado interés. De hecho, existen métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, problemas de valores iniciales, problemas de contorno y ecuaciones en derivadas parciales que se estudian en el Grado en Matemáticas.

A lo largo de este documento vamos a mostrar un método alternativo de resolución a este tipo de problemas que no se ha estudiado con detalle en dicha titulación, aunque nos restringiremos a los casos lineales. Este método permite ahorrarnos los numerosos cálculos que implican la derivación y la integración, pudiendo optimizar la resolución y convirtiéndolo en un proceso más efectivo. Se presenta al lector el método de la transformada de Laplace junto con todas sus propiedades acompañadas de ejemplos, con la motivación de poder usarlas como ayuda en la resolución de problemas que involucren algunos tipos de ecuaciones diferenciales.

La estructura de este trabajo permite poder usarlo como herramienta tanto para aplicar como para entender la transformada de Laplace. Empezamos con una definición y varias propiedades para seguir con la transformada inversa y la aplicación a la resolución de problemas y finalizamos con varios ejemplos donde se muestra todo lo anterior. Además, se dedica un capítulo a estudiar la relación de la transformada de Laplace con la variable compleja. Tratamos de justificar todos los enunciados de forma completa, clara y concisa.

Abstract

Nowadayas, we can find different situations whose behaviour can be modeled and studied by means of differential equations. Far of being a purely mathematical problem, differential equations are used by physicists, biologists, engineers and scientists in general to understand problems of some interest. In fact, there are methods to solve differential equations, initial value problems, boundary conditions problems and partial differential equations that are studied in Maths degree.

Along this document, we are going to showing an alternative resolution method to this kind of problems, although we restrict to linear cases. This method allows for saving on some calculations that imply to use the derivation and integration, optimizing the resolution and changing the problem in an most effective process. We introduce to the reader the Laplace transform method together with all her properties and examples, with the objective of being able to use it in the resolution of problems with differential equations.

The structure of this work allow for being able to use it like a tool to apply and understand the Laplace transform. We start with a definition and some properties, after we continue with the inverse transform and the application to solve problems, and we finish with some examples that show all the previous. Moreover, we dedicate a chapter to study the relation with the complex analysis. We try to prove all principles in a complete, simple and concise way.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En primer lugar, para situar al lector, vamos a definir la transformada integral como cualquier operador T aplicado sobre una función $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma

$$T(f(t))(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt\,, \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son números reales.}$$

A la función K se le llama núcleo de la transformada. La transformada de Laplace es una transformada integral donde $K(s,t) = e^{-st}$. Vamos a ver ahora cómo surgió dicha transformada y su evolución a lo largo del tiempo.

La transformada de Laplace recibe su nombre debido al matemático francés *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827), quien le dió forma a dicho operador en una de sus mejores obras, *Théorie Analytique des Probabilités* (1812), usando sus propios descubrimientos junto con numerosas ideas ajenas.

Todo comienza en 1744, cuando el físico y matemático *Leonhard Euler* (1707-1783) investigó la posibilidad de encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales que fueran integrales de la forma:

$$y = \int X(x)e^{ax}dx \qquad \text{e} \qquad y = \int X(x)x^{A}dx \qquad\quad , a, A \in \mathbb{R}$$

A su vez, el también físico y matemático *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) vinculó a la teoría de la probabilidad este tipo de integrales en un trabajo sobre funciones de densidad de probabilidad, pero esta vez usó integrales con la forma:

$$\int X(x)e^{-ax}a^{x}dx \qquad , a \in \mathbb{R}$$

En 1782, siguiendo las ideas de *Euler*, *Laplace* investiga dichas integrales vistas como soluciones de ecuaciones diferenciales. Fue tres años más tarde cuando, después de familiarizarse con estas integrales, *Laplace* las usa para transformar ecuaciones diferenciales, observando que dichas ecuaciones transformadas eran aún más fáciles de resolver que las originales. Sin embargo, *Laplace* usa libremente en su libro la transformada sin asentar sus bases teóricas, únicamente describiendo algunas de sus propiedades.

Después de esto, la transformada de Laplace cayó en el olvido para que en la segunda mitad del siglo XIX fuera desenterrada por *Oliver Heaviside* (1850-1925), quien la usó en sus trabajos de teoría de vibraciones (electromagnetismo). El ingeniero, físico y matemático inglés *Heaviside* desarrolló esta técnica al descubrir que usando la transformada de Laplace podía convertir las ecuaciones diferenciales con las que trabajaba en ecuaciones algebraicas fácilmente resolubles.

Pero a medida que su uso iba incrementándose en trabajos de físicos, ingenieriles y científicos en general, también crecía la incertidumbre de determinados matemáticos, que veían esta técnica como unas "manipulaciones " realizadas con éxito pero sin fundamento alguno. De hecho, estos científicos se justificaban con comentarios tales como: "¿Debe uno entender el proceso de la digestión para poder comer?.Así que, no satisfechos con este tipo de respuestas, a principios del siglo XX algunos matemáticos tales como *Thomas Bromwich* (1875-1929) trataron de encontrar una base teórica que fundamentara este tipo de "manipulaciones " con la ayuda de la variable compleja, entre otras cosas, creando lo que actualmente se conoce como el método de las transformadas de Laplace.

Hoy en día, la transformada de Laplace es usada en numerosos problemas de índole científica que pueden modelarse con ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales, ya que permite optimizar la resolución en cuanto a número y sencillez de operaciones. Este operador nos permite cambiar la integración y la derivación por multiplicación y división, por lo que se convierte en un método muy ventajoso y efectivo.

En este trabajo de fin de grado de Matemáticas, vamos a presentar tanto la transformada de Laplace como la transformada de Laplace inversa junto con sus principales propiedades y aplicaciones, añadiendo métodos de cálculo y ejemplificando. Además, nos introduciremos en el mundo de la variable compleja para entender la relación de la transformada de Laplace con la transformada de Fourier, lo que nos abrirá la puerta a un nuevo método de cálculo de la transformada inversa de Laplace basado en teoría de residuos. Se dedica también un capítulo completo a la resolución de problemas que modelan casos reales, con sus respectivas representaciones gráficas realizadas con la ayuda de los paquetes informáticos `Matlab` ([22]) y `FreeFem++` ([11]).

Por último, notar que a lo largo del documento podremos encontrar referencias de algunas asignaturas del grado tales como:

- *Ecuaciones diferenciales ordinarias*
  (asignatura obligatoria, 2º curso, 2º cuatrimestre)
- *Ampliación de ecuaciones diferenciales*
  (asignatura obligatoria, 3º curso, 1º cuatrimestre)
- *Ecuaciones en derivadas parciales*
  (asignatura optativa, 4º curso, 1º cuatrimestre)
- *Complementos de modelización y optimización numérica*
  (asignatura optativa, 4º curso, 2º cuatrimestre)
- *Funciones de una variable compleja*
  (asignatura obligatoria, 3º curso, 1º cuatrimestre)
- *Series de funciones e integral de Lebesgue*
  (asignatura obligatoria, 2º curso, 1º cuatrimestre)

Esto es porque vamos a comparar los métodos que estudiamos en dichas asignaturas con la transformada de Laplace a la hora de aplicarlos en la resolución de los problemas que proponemos.

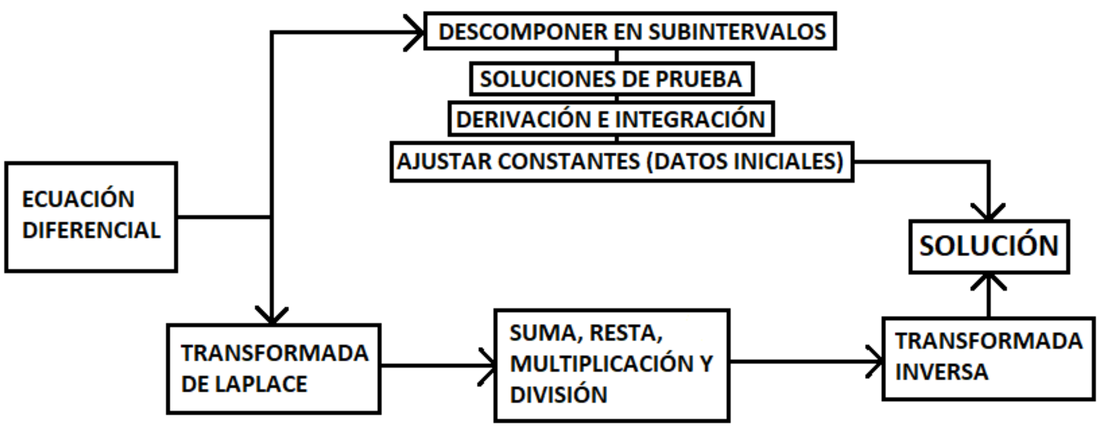
Capítulo 2

Definición y propiedades de la transformada de Laplace

Todos los resultados teóricos que se hallan en este capítulo pueden encontrarse en [4], [5], [7], [10], [13], [17], [20], [21] y [23].

2.1. Definición

La transformada de Laplace es un operador lineal que resulta bastante útil para la resolución de numerosos problemas matemáticos y, en particular, para la resolución ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales. Centrándonos en esta aplicación, la transformada de Laplace convierte la ecuación diferencial en una ecuación algebraica generalmente fácil de resolver, por lo que podremos encontrar la solución de la EDO con solo aplicar la inversa de dicha transformada a la solución de la ecuación algebraica obtenida. Una de las ventajas que presenta el uso de este operador es que simplifica los cálculos para resolver EDOs cuyo dominio debe ser dividido en subintervalos, como se muestra en el siguiente diagrama:



Definición 2.1.1. ***(Transformada de Laplace)*** Consideremos una función medible $f\colon [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ que para algún $w \in \mathbb{R}$ cumple que $\limsup_{t\uparrow\infty} |f(t)|e^{-wt} < \infty$. Se define la transformada de Laplace de f, denotada por L ó $\mathcal{L}[f]$, como una función de una variable real que viene dada por:

$$L(t) = \mathcal{L}[f](t) = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-ts}\, ds\,, \qquad s > w$$

definida donde la integral exista, y entendiendo la integral en el sentido impropio, es decir:

$$\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ts}\, ds = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N} f(s)e^{-ts}\, ds$$

Observación 2.1.2. La hipótesis que le pedimos a la función f en la definición anterior es equivalente a la definición de función de orden exponencial w que mostramos en la sección siguiente.

2.2. Existencia y unicidad

La transformada de Laplace está definida como una integral impropia, así que la primera pregunta que surge es si existe siempre. Efectivamente, hay funciones para las que no converge esta integral para todos los puntos, pero nos encontramos con que hay una gran variedad de funciones, que veremos a continuación, que surgen en las aplicaciones de ecuaciones diferenciales lineales, para las que sí converge dicha integral impropia.

Antes de comenzar con el estudio de la transformada de Laplace, repasaremos algunos conceptos que necesitaremos para ello.

Definición 2.2.1. ***(Discontinuidades)*** Dada una función f de una variable real, se dice que f tiene:

- Una discontinuidad de salto finito en $t_0 \in [a,b]$ si los límites laterales de f en t_0 existen, son finitos y no coinciden.
- Una discontinuidad de salto infinito en $t_0 \in [a,b]$ cuando los límites laterales de f en t_0 existen, pero uno es infinito y el otro finito.
- Una discontinuidad asintótica en $t_0 \in [a,b]$ si los límites laterales de f en t_0 existen y son infinitos

Definición 2.2.2. ***(Función continua a trozos)*** Una función f de una variable real es continua a trozos en el intervalo $[a,b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si f es continua en cada punto del intervalo excepto en un número finito de puntos, donde tiene una discontinuidad de salto. Además, f es continua a trozos en $[0,+\infty)$ si lo es para cada $[0,N]$, con $N > 0$.

Definición 2.2.3. ***(Función de orden exponencial)*** Se dice que una función f de una variable real es de orden exponencial α, con $\alpha > 0$, si existen T y M constantes no negativas tales que:

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \quad \forall t \geqslant T$$

Teorema 2.2.4. ***(Existencia)*** *Si f es una función continua a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α, entonces la transformada de Laplace de la función f, $\mathcal{L}[f](t)$, existe para todo $t > \alpha$.*

Demostración. Hay que demostrar que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds$ converge para todo $t > \alpha$.

Para ello, dividamos primero la integral en dos partes:

$$\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds = \int_0^{T} f(s)e^{-ts}\,ds + \int_T^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds,$$

donde T se toma para que se verifique $|f(s)| \leqslant Me^{\alpha s}$ para todo $s \geqslant T$.

La primera integral existe porque $f(s)e^{-ts}$ es continua a trozos en $[0, T]$ para cualquier t fijo, ya que f lo es por hipótesis, y e^{-ts} es de clase $C^\infty([0, T])$ para cualquier t fijo.

Para la segunda integral, sabemos que se cumple que $|f(s)| \leqslant Me^{\alpha s}$ para todo $s \geqslant T$, así que tenemos:

$$|f(s)e^{-ts}| = e^{-ts}|f(s)| \leqslant e^{-ts}Me^{\alpha s} = Me^{s(\alpha-t)}$$

Ahora bien, como la integral de $Me^{s(\alpha-t)}$ converge para todo $t > \alpha$, ya que:

$$\int_T^{+\infty} Me^{s(\alpha-t)}\,ds = M\int_T^{+\infty} e^{s(\alpha-t)}\,ds = M\left[\frac{e^{s(\alpha-t)}}{\alpha-t}\right]_{s=T}^{s=+\infty} = M\frac{e^{T(\alpha-t)}}{t-\alpha},$$

por el Teorema 7.1.1 (*Teorema de comparación para integrales impropias*), concluimos que $\displaystyle\int_T^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds$ converge para todo $t > \alpha$.

Finalmente, como las dos integrales convergen, su suma también, y tenemos que la transformada de Laplace de f existe para todo $t > \alpha$.

∎

Observación 2.2.5. Debido a este teorema, en adelante vamos a pedir que las funciones que consideremos sean continuas a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α. Así, cuando digamos que existe la transformada de Laplace de una función, estará implícito que dicha función cumple las características nombradas anteriormente.

Teorema 2.2.6. ***(Unicidad)*** *Sean $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones para las que existen sus transformadas de Laplace. Entonces $\mathcal{L}[f](t) = \mathcal{L}[g](t)$ $\forall t > \alpha$, para algún α, con $t \in D_1 \cap D_2$, si y solo si $f(t) = g(t)$ casi por doquier.*

Demostración.

- Supongamos en primer lugar $f(t) = g(t)$ casi por doquier. Entonces:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](t) - \mathcal{L}[g](t)| &= \left| \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-st} f(s) ds - \lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-st} g(s) ds \right| \leq \\ &\leq \lim_{x \to +\infty} \int_0^x |e^{-st} f(s) - e^{-st} g(s)| ds = \\ &= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x |e^{-st}||f(s) - g(s)| ds \ = \ 0 \end{aligned}$$

  Por tanto, concluimos que $\mathcal{L}[f](t) = \mathcal{L}[g](t)$.

- Veremos la prueba de este teorema en la Sección 5.3..

■

2.3. Propiedades básicas

Proposición 2.3.1. ***(Linealidad de la transformada)*** *Dadas dos funciones f y g para las que están definidas sus transformadas de Laplace $\forall t > \alpha$, y sean c_1 y c_2 dos constantes, entonces se tiene:*

$$\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g] = c_1 \mathcal{L}[f] + c_2 \mathcal{L}[g]$$

Demostración. Por la linealidad de la integral, se tiene:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g](t) = \int_0^{+\infty} (c_1 f(s) + c_2 g(s)) e^{-ts} \, ds = \\ &= \int_0^{+\infty} c_1 f(s) e^{-ts} \, ds + \int_0^{+\infty} c_2 g(s) e^{-ts} \, ds = \\ &= c_1 \int_0^{+\infty} f(s) e^{-ts} \, ds + c_2 \int_0^{+\infty} g(s) e^{-ts} \, ds = c_1 \mathcal{L}[f](t) + c_2 \mathcal{L}[g](t) \end{aligned}$$

■

Proposición 2.3.2. ***(Transformada de la derivada)*** *Sea f una función continua en $[0,+\infty)$ tal que f' es continua a trozos en $[0,+\infty)$ y ambas son de orden exponencial α. Entonces, para $t > \alpha$ se tiene:*

$$\mathcal{L}[f'](t) = t\mathcal{L}[f](t) - f(0) \tag{2.1}$$

Demostración. Por definición, tenemos que:

$$\mathcal{L}[f'](t) = \int_0^{+\infty} f'(s)e^{-ts}\,ds = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N f'(s)e^{-ts}\,ds$$

Ahora bien, si aplicamos integración por partes, con $u = e^{-ts}$ y $dv = f'(s)ds$:

$$\mathcal{L}[f'](t) = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N f'(s)e^{-ts}\,ds = \lim_{N\to+\infty} \left(\left[f(s)e^{-ts}\right]_0^N + t\int_0^N f(s)e^{-ts}\,ds \right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \left(f(N)e^{-Nt}\right) - f(0) + t\mathcal{L}[f](t)$$

Para calcular $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(f(N)e^{-Nt}\right)$ hay que tener en cuenta que f es de orden exponencial α, por lo que existen dos constantes $T, M \geqslant 0$ tales que $|f(N)| \leqslant Me^{\alpha N} \ \ \forall N \geqslant T$, entonces para $t > \alpha$:

$$0 \leqslant \lim_{N\to+\infty} \left|f(N)e^{-Nt}\right| \leqslant \lim_{N\to+\infty} \left|Me^{N(\alpha-t)}\right| = 0 \implies \lim_{N\to+\infty} \left(f(N)e^{-Nt}\right) = 0$$

Por tanto, $\mathcal{L}[f'](t) = t\mathcal{L}[f](t) - f(0)$. ■

Proposición 2.3.3. ***(Transformada de derivadas de orden superior)*** *Sea f una función continua en $[0,+\infty)$ tal que $f', f'', ..., f^{n-1)}$ son continuas en $[0,+\infty)$, $f^{n)}$ es continua a trozos en $[0,+\infty)$ y todas ellas de orden exponencial α. Entonces, para $t > \alpha$ se tiene:*

$$\mathcal{L}[f^{n)}](t) = t^n\mathcal{L}[f](t) - t^{n-1}f(0) - t^{n-2}f'(0) - ... - tf^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0)$$

Demostración. Lo probaremos por inducción.
En primer lugar, sabemos que se cumple para $n = 1$ gracias a la Proposición 2.3.2 (*Transformada de la derivada*). Supongamos ahora que se cumple para $n-1$, y vamos a probarlo para n. En efecto:

$$\mathcal{L}[f^{n)}](t) = \mathcal{L}[(f^{n-1)})'](t)$$

Ahora bien, como $f^{n-1)}$ es continua a trozos en $[0,+\infty)$ y es de orden exponencial α, se verifica la desigualdad (2.1) sustituyendo $f^{n-1)}$ en lugar de f. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f^{n)}](t) &= \mathcal{L}[(f^{n-1)})'](t) = t\mathcal{L}[f^{n-1)}](t) - f^{n-1)}(0) = \\
&= t\Big(t\mathcal{L}[f^{n-2)}](t) - f^{n-2)}(0)\Big) - f^{n-1)}(0) = \\
&= t^2\mathcal{L}[f^{n-2)}](t) - tf^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0) = \\
&= \ldots = \\
&= t^n\mathcal{L}[f](t) - t^{n-1}f(0) - t^{n-2}f'(0) - \ldots - tf^{n-2)}(0) - f^{n-1)}(0)
\end{aligned}
$$

■

Proposición 2.3.4. ***(Derivada de la transformada)*** *Sea f una función continua a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α, y denotemos $\mathcal{L}[f] = L$. Entonces, para $t > \alpha$ se tiene:*

$$\mathcal{L}[t^n f](t) = (-1)^n L^{n)}(t)$$

Demostración. Probaremos el resultado por inducción.

Para $n = 1$, como f es continua a trozos por hipótesis, y sabemos que e^{-ts} es continua para cualquier t fijo, por el Teorema 7.1.2 (*Regla de Leibniz*) se tiene que:

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^b f(s)e^{-ts}\,ds\right] = \int_0^b \frac{d}{dt}\left(f(s)e^{-ts}\right)\,ds = -\int_0^b sf(s)e^{-ts}\,ds$$

Por tanto:

$$L'(t) = \frac{d}{dt}\left[\lim_{b\longrightarrow+\infty}\int_0^b f(s)e^{-ts}\,ds\right] = -\lim_{b\longrightarrow+\infty}\int_0^b sf(s)e^{-ts}\,ds = -\mathcal{L}[tf](t)$$

Supongamos ahora que se cumple para $n-1$, y probémoslo para n:

$$L^{n)}(t) = \frac{d}{dt}L^{n-1)}(t) = \frac{d}{dt}\left[(-1)^{n-1}\mathcal{L}[t^{n-1}f](t)\right] = (-1)^{n-1}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} s^{n-1}f(s)e^{-ts}\,ds$$

Ahora bien, vamos a ver que la integral está bien definida. Sabemos que f es de orden exponencial α, así que: $|s^{n-1}f(s)e^{-ts}| \leq M\,|s^{n-1}|e^{\alpha s}e^{-ts} = M|s^{n-1}|e^{s(\alpha-t)}$.

Como $M|s^{n-1}|e^{s(\alpha-t)}$ converge a 0 si $s \longrightarrow +\infty$ para todo $t > \alpha$, y hemos tomado $t > \alpha$, concluimos que la integral está bien definida, y podemos aplicar la regla de Leibniz:

$$
\begin{aligned}
L^{n)}(t) &= (-1)^{n-1}\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} s^{n-1}f(s)e^{-ts}\,ds = (-1)^{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}s^{n-1}f(s)e^{-ts}\,ds = \\
&= (-1)^n\int_0^{+\infty} s^n f(s)e^{-ts}\,ds = (-1)^n\mathcal{L}[t^n f](t)
\end{aligned}
$$

■

Proposición 2.3.5. ***(Transformada de la integral)*** *Sea f una función para la que sabemos que existe su transformada de Laplace, $\mathcal{L}[f]$, entonces:*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(z)dz\right](t) = \frac{\mathcal{L}[f](t)}{t}$$

Demostración. Si denotamos $g(t) = \int_0^t f(z)dz$, con $g(0) = 0$ y $g'(t) = f(t)$, entonces, por el Teorema 2.2.6, $\mathcal{L}[f](t) = \mathcal{L}[g'](t)$, y usando ahora la Proposición 2.3.2 (*Transformada de la derivada*):

$$\mathcal{L}[f](t) = \mathcal{L}[g'](t) = t\,\mathcal{L}[g](t) - g(0) = t\,\mathcal{L}[g](t) = t\,\mathcal{L}\left[\int_0^t f(z)dz\right](t)$$

■

Proposición 2.3.6. ***(Integral de la transformada)*** *Sea f una función integrable para la que sabemos que existe su transformada de Laplace, $\mathcal{L}[f]$, entonces:*

1. $\displaystyle\int_t^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)\,ds = \mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right](t)$, *para todo t donde esté definida la transformada.*
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)\,ds = \int_0^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\,dz$

Demostración. Usando la definición, y como en ambos casos el valor absoluto del integrando es integrable, podemos aplicar el Teorema 7.1.4 (*Teorema de Fubini*). Por tanto, nos queda:

1. En primer lugar:

$$\int_t^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)\,ds = \int_t^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(z)e^{-sz}\,dz\right)ds = \int_0^{+\infty} f(z)\left(\int_t^{+\infty} e^{-sz}\,ds\right)dz =$$
$$= \int_0^{+\infty} f(z)\left[\frac{-1}{z}e^{-sz}\right]_{s=t}^{s=+\infty} dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{z}f(z)e^{-tz}\,dz = \mathcal{L}\left[\frac{f}{t}\right](t)$$

2. De forma similar:

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}[f](s)\,ds = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(z)e^{-sz}\,dz\right)ds = \int_0^{+\infty} f(z)\left(\int_0^{+\infty} e^{-sz}\,ds\right)dz =$$
$$= \int_0^{+\infty} f(z)\left[\frac{-1}{z}e^{-sz}\right]_{s=0}^{s=+\infty} dz = \int_0^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\,dz$$

■

Proposición 2.3.7. ***(Teorema del valor inicial)*** *Consideremos una función f continua a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{t \to +\infty} \mathcal{L}[f](t) = 0$$

Demostración. En primer lugar, como f es de orden exponencial α, entonces existen T y M constantes no negativas tales que: $|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \quad \forall t \geqslant T$. Por tanto:

$$\lim_{t \to +\infty} |\mathcal{L}[f](t)| \leqslant \lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} |f(s)e^{-ts}|\, ds \leqslant \lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} Me^{\alpha s}e^{-ts}\, ds =$$
$$= M \lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\alpha)}\, ds = \lim_{t \to +\infty} \frac{M}{t-\alpha} = 0 \qquad , \forall t > \alpha$$

■

Proposición 2.3.8. ***(Corolario del teorema del valor inicial)*** *Sea f una función tal que ella y su derivada primera f' son continuas a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{t \to +\infty} t\mathcal{L}[f](t) = f(0)$$

Demostración. Por la Proposición 2.3.2 (*Transformada de la derivada*), se tiene que: $\mathcal{L}[f'](t) = t\mathcal{L}[f](t) - f(0)$. Ahora bien, por la Proposición 2.3.7 (*Teorema del valor inicial*), sabemos que $\lim_{t \to +\infty} \mathcal{L}[f'](t) = 0$, así que despejando de la ecuación anterior nos queda:

$$\lim_{t \to +\infty} t\mathcal{L}[f](t) = f(0)$$

■

Proposición 2.3.9. ***(Teorema del valor final)*** *Sea f una función tal que ella y su derivada primera f' son continuas a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α, y supongamos que $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ existe y es finito. Entonces se tiene que:*

$$\lim_{t \to 0} t\mathcal{L}[f](t) = \lim_{t \to +\infty} f(t)$$

Demostración. Por la Proposición 2.3.2 (*Transformada de la derivada*), se tiene que: $\mathcal{L}[f'](t) = t\mathcal{L}[f](t) - f(0)$. Si tomamos límite cuando $t \longrightarrow 0$, como $\mathcal{L}[f'](t)$ es continua y derivable:

$$\lim_{t \to 0} t\mathcal{L}[f](t) - f(0) = \lim_{t \to 0} \mathcal{L}[f'](t) = \mathcal{L}[f'](0) = \int_0^{+\infty} f'(s)ds$$

Por tanto, concluimos:

$$\lim_{t\to 0} t\mathcal{L}[f](t) - f(0) = \int_0^{+\infty} f'(s)ds = \lim_{t\to+\infty} f(t) - f(0) \implies$$

$$\lim_{t\to 0} t\mathcal{L}[f](t) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

■

Proposición 2.3.10. ***(Teoremas de traslación)*** *Sea f una función de orden exponencial α. Si su transformada de Laplace, $\mathcal{L}[f](t)$, existe para $t > \alpha$, entonces se tienen:*

1. $\mathcal{L}[e^{at}f](t) = \mathcal{L}[f](t-a)$, *para* $t > \alpha + a$, *donde* $a \in \mathbb{R}$.

2. $\mathcal{L}[H(t-c)f(t-c)] = e^{-ct}\mathcal{L}[f(t)]$, *para* $t > \alpha$, *o bien*

$\mathcal{L}[H(t-c)f(t)] = e^{-ct}\mathcal{L}[f(t+c)]$, *para* $t > \alpha$,
con $c \geqslant 0$, *donde* $H(t-c)$ *es la función de Heaviside , definida como*

$$H(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geqslant c \end{cases} \tag{2.2}$$

Demostración. 1. En primer lugar, la función $e^{at}f(t)$ es de orden exponencial $\alpha + a$, ya que $|e^{at}f(t)| \leqslant Me^{at}e^{\alpha t} = Me^{(a+\alpha)t}$. Por tanto, vamos a tomar $t > \alpha + a$. Ahora bien, dada $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}[e^{at}f](t) = \int_0^{+\infty} e^{as}f(s)e^{-ts}\,ds = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-(t-a)s}\,ds = \mathcal{L}[f](t-a)$$

2. En segundo lugar, se tiene que si f es de orden exponencial α, entonces $f(t-c)$ y $f(t+c)$ serán también de orden exponencial α. Por tanto, tomaremos $t > \alpha$.

Ahora bien, dada $c > 0$, y considerando el cambio de variable $z = s - c$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[H(t-c)f(t-c)] &= \int_0^{+\infty} H(s-c)f(s-c)e^{-ts}\,ds = \int_c^{+\infty} f(s-c)e^{-ts}\,ds = \\
&= \int_0^{+\infty} f(z)e^{-t(z+c)}\,dz = e^{-ct}\int_0^{+\infty} f(z)e^{-tz}\,dz = e^{-ct}\mathcal{L}[f](t) \\
\mathcal{L}[H(t-c)f(t)] &= \int_0^{+\infty} H(s-c)f(s)e^{-ts}\,ds = \int_c^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds = \\
&= \int_0^{+\infty} f(z+c)e^{-t(z+c)}\,dz = e^{-ct}\int_0^{+\infty} f(z+c)e^{-tz}\,dz = \\
&= e^{-ct}\mathcal{L}[f(t+c)]
\end{aligned}$$

■

Antes de enunciar la siguiente propiedad, recordemos la definición de convolución de dos funciones:

Definición 2.3.11. (Convolución de dos funciones) Dadas f y g dos funciones integrables definidas en el mismo dominio Ω, se define la convolución de f y g, $f \star g$, como:

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(t-z)g(z)\,dz$$

Proposición 2.3.12. ***(Teorema de convolución)*** *Sean f y g dos funciones continuas a trozos en $[0, +\infty)$ y de orden exponencial α. Supongamos también que existen las transformadas de Laplace de f y g. Entonces se tiene que:*

$$\mathcal{L}[f \star g](t) = \mathcal{L}[f](t)\,\mathcal{L}[g](t) \quad \forall t > \alpha$$

Demostración. Por definición y usando la función de Heaviside definida en (2.2), tenemos para $0 \leqslant z \leqslant s$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f \star g](t) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^s f(s-z)g(z)dz \right) e^{-ts}\,ds = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} H(s-z)f(s-z)g(z)dz \right) e^{-ts}\,ds\end{aligned}$$

Ahora bien, como el valor absoluto del integrando es integrable en $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$, por el Teorema 7.1.4 (*Teorema de Fubini*) podemos cambiar el orden de integración, por lo que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f \star g](t) &= \int_0^{+\infty} g(z) \left(\int_0^{+\infty} H(s-z)f(s-z)e^{-ts}ds \right) dz = \\ &= \int_0^{+\infty} g(z)\,\mathcal{L}[H(t-z)f(t-z)](t)\,dz\end{aligned}$$

Y por la primera igualdad del apartado 2. de la Proposición 2.3.10 (*Teoremas de traslación*), llegamos a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f \star g](t) &= \int_0^{+\infty} g(z)\,\mathcal{L}[H(t-z)f(t-z)](t)\,dz = \int_0^{+\infty} g(z)e^{-zt}\mathcal{L}[f](t)\,dz = \\ &= \mathcal{L}[f](t) \int_0^{+\infty} g(z)e^{-zt}\,dz = \mathcal{L}[f](t)\,\mathcal{L}[g](t)\end{aligned}$$

■

Proposición 2.3.13. ***(Transformada de una función periódica)*** *Sea f una función periódica de periodo T, es decir, tal que se verifica que $f(t+T) = f(t)$ para todo t en el dominio de f. Si existe la transformada de Laplace de f, entonces se tiene que:*

$$\mathcal{L}[f](t) = \frac{\int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds}{1-e^{-tT}}$$

Demostración. En primer lugar, por definición tenemos que:

$$\mathcal{L}[f](t) = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds = \int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds + \int_T^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds$$

Haciendo ahora el cambio de variable $s = z + T$ en la segunda integral, queda:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](t) &= \int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds + \int_T^{+\infty} f(s)e^{-ts}\,ds = \\
&= \int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds + \int_0^{+\infty} f(z+T)e^{-t(z+T)}\,dz = \\
&= \int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds + e^{-tT}\int_0^{+\infty} f(z)e^{-tz}\,dz = \\
&= \int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds + e^{-tT}\,\mathcal{L}[f](t)
\end{aligned}$$

Luego:

$$\mathcal{L}[f](t)\,(1-e^{-tT}) = \int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds \Longrightarrow \mathcal{L}[f](t) = \frac{\int_0^T f(s)e^{-ts}\,ds}{1-e^{-tT}}$$

■

2.4. Transformada de Laplace de algunas funciones elementales

Una vez que hemos enunciado y demostrado todas las propiedades de la transformada de Laplace que vamos a usar, nos será de utilidad también calcular la transformada de algunas funciones elementales para ahorrar cálculos posteriores. Añadiremos al final de este apartado una tabla como resumen de todos los cálculos.

- Dada $c \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}[c](t) = c\int_0^{+\infty} e^{-st}\,ds = c\left[\frac{-1}{t}e^{-st}\right]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{c}{t} \tag{2.3}$$

- Dada $a \in \mathbb{R}$, para $t > a$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}](t) &= \int_0^{+\infty} e^{as} e^{-st}\, ds = \int_0^{+\infty} e^{-s(t-a)}\, ds = \\ &= \left[\frac{-1}{t-a} e^{-s(t-a)} \right]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{1}{t-a} \end{aligned} \tag{2.4}$$

- Dada $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(bt)](t) &= \int_0^{+\infty} \sin(bs)\, e^{-st}\, ds = \left[\begin{array}{l} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \sin(bs)\, ds\,,\ v = \frac{-1}{b}\cos(bs) \end{array} \right] = \\ &= \left[\frac{-1}{b} e^{-st} \cos(bs) \right]_{s=0}^{s=+\infty} - \frac{t}{b} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(bs)\, ds = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \cos(bs)\, ds\,,\ v = \frac{1}{b}\sin(bs) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{b} - \frac{t}{b} \left(\left[\frac{1}{b} e^{-st} \sin(bs) \right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{t}{b} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(bs)\, ds \right) = \\ &= \frac{1}{b} - \frac{t^2}{b^2}\, \mathcal{L}[\sin(bt)](t) \end{aligned}$$

Ahora bien, despejando la transformada del seno, obtenemos:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[\sin(bt)](t)\, (1 + \frac{t^2}{b^2}) = \frac{1}{b} \iff \\ &\mathcal{L}[\sin(bt)](t)\, (\frac{b^2 + t^2}{b^2}) = \frac{1}{b} \iff \\ &\mathcal{L}[\sin(bt)](t) = \frac{b}{b^2 + t^2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

- Dada $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(bt)](t) &= \int_0^{+\infty} \cos(bs)\, e^{-st}\, ds = \left[\begin{array}{l} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \cos(bs)\, ds\,,\ v = \frac{1}{b}\sin(bs) \end{array} \right] = \\ &= \left[\frac{1}{b} e^{-st} \sin(bs) \right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{t}{b} \int_0^{+\infty} e^{-st} \sin(bs)\, ds = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \sin(bs)\, ds\,,\ v = \frac{-1}{b}\cos(bs) \end{array} \right] = \\ &= \frac{t}{b} \left(\left[\frac{-1}{b} e^{-st} \cos(bs) \right]_{s=0}^{s=+\infty} - \frac{t}{b} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos(bs)\, ds \right) = \\ &= \frac{t}{b^2} - \frac{t^2}{b^2}\, \mathcal{L}[\cos(bt)](t) \end{aligned}$$

Y despejando la transformada del coseno, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(bt)](t)\,(1+\frac{t^2}{b^2}) &= \frac{t}{b^2} \quad\Longleftrightarrow\\
\mathcal{L}[\cos(bt)](t)\,(\frac{b^2+t^2}{b^2}) &= \frac{t}{b^2} \quad\Longleftrightarrow\\
\mathcal{L}[\cos(bt)](t) &= \frac{t}{b^2+t^2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

- Dada $b \in \mathbb{R}$, consideremos $t > |b|$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sinh(bt)](t) &= \int_0^{+\infty} \sinh(bs)\, e^{-st}\, ds = \begin{bmatrix} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \sinh(bs)\, ds\,,\ v = \frac{1}{b}\cosh(bs) \end{bmatrix} = \\
&= \left[\frac{1}{b}e^{-st}\cosh(bs)\right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{t}{b}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cosh(bs)\, ds = \\
&= \begin{bmatrix} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \cosh(bs)\, ds\,,\ v = \frac{1}{b}\sinh(bs) \end{bmatrix} = \\
&= -\frac{1}{b} + \frac{t}{b}\left(\left[\frac{1}{b}e^{-st}\sinh(bs)\right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{t}{b}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sinh(bs)\, ds\right) = \\
&= -\frac{1}{b} + \frac{t^2}{b^2}\,\mathcal{L}[\sinh(bt)](t)
\end{aligned}$$

Despejando la transformada del seno hiperbólico, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sinh(bt)](t)\,(1-\frac{t^2}{b^2}) &= -\frac{1}{b} \quad\Longleftrightarrow\\
\mathcal{L}[\sinh(bt)](t)\,(\frac{b^2-t^2}{b^2}) &= -\frac{1}{b} \quad\Longleftrightarrow\\
\mathcal{L}[\sinh(bt)](t) &= \frac{b}{t^2-b^2}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

- Dada $b \in \mathbb{R}$, consideremos $t > |b|$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cosh(bt)](t) &= \int_0^{+\infty} \cosh(bs)\, e^{-st}\, ds = \begin{bmatrix} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \cosh(bs)\, ds\,,\ v = \frac{1}{b}\sinh(bs) \end{bmatrix} = \\
&= \left[\frac{1}{b}e^{-st}\sinh(bs)\right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{t}{b}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sinh(bs)\, ds = \\
&= \begin{bmatrix} u = e^{-st}\,,\ du = -te^{-st}\, ds \\ dv = \sinh(bs)\, ds\,,\ v = \frac{1}{b}\cosh(bs) \end{bmatrix} = \\
&= \frac{t}{b}\left(\left[\frac{1}{b}e^{-st}\cosh(bs)\right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{t}{b}\int_0^{+\infty} e^{-st}\cosh(bs)\, ds\right) = \\
&= -\frac{t}{b^2} + \frac{t^2}{b^2}\,\mathcal{L}[\cosh(bt)](t)
\end{aligned}$$

Y despejando la transformada del coseno hiperbólico:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[\cosh{(bt)}](t)\,(1-\frac{t^2}{b^2}) = -\frac{t}{b^2} \quad \Longleftrightarrow \\
&\mathcal{L}[\cos{(bt)}](t)\,(\frac{b^2-t^2}{b^2}) = -\frac{t}{b^2} \quad \Longleftrightarrow \\
&\mathcal{L}[\cos{(bt)}](t) = \frac{t}{t^2-b^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

- Dada $n \in \mathbb{N}$, e integrando por partes, para $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^n](t) &= \int_0^{+\infty} s^n e^{-st}\,ds = \begin{bmatrix} u = s^n\,,\ du = ns^{n-1}\,ds \\ dv = e^{-st}\,ds\,,\ v = \frac{-1}{t}e^{-st} \end{bmatrix} = \\
&= \left[\frac{-1}{t}s^n e^{-st}\right]_{s=0}^{s=+\infty} + \frac{n}{t}\int_0^{+\infty} s^{n-1}e^{-st}\,ds = \frac{n}{t}\,\mathcal{L}[t^{n-1}](t) = \\
&= \frac{n}{t}\frac{n-1}{t}\,\mathcal{L}[t^{n-2}](t) = \ldots = \frac{n!}{t^n}\,\mathcal{L}[1](t) = \frac{n!}{t^{n+1}}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

- Sea $r > -1$ un número real (en lugar de un entero), y consideremos la función Gamma definida en 7.4.1:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1}e^{-s}\,ds\,, \tag{2.10}$$

cuyos valores principales pueden encontrarse en la Proposición 7.4.2. Entonces para $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^r](t) &= \int_0^{+\infty} s^r e^{-st}\,ds = \begin{bmatrix} z = st \\ dz = tds \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^r e^{-z}\left(\frac{1}{t}\right)dz = \\
&= \frac{1}{t^{r+1}}\int_0^{+\infty} z^r e^{-z}dz = \frac{\Gamma(r+1)}{t^{r+1}}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

- Dado $c \geqslant 0$, y sea $H(t-c)$ la función de Heaviside definida en (2.2):

$$\mathcal{L}[H(t-c)](t) = \int_0^{+\infty} H(s-c)e^{-st}\,ds = \int_c^{+\infty} e^{-st}\,ds = \left[\frac{-e^{-st}}{t}\right]_c^{+\infty} = \frac{e^{-ct}}{t} \tag{2.12}$$

- Dado n un número real, consideremos la función de Bessel de orden n dada en la Definición7.5.1, y cuyas propiedades podemos encontrar en la Proposición 7.5.2:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Vamos a calcular la transformada de Laplace de la función de Bessel de orden 0, vista como solución del problema de valores iniciales siguiente:

$$\begin{cases} tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0 \\ J_0(0) = 1\,,\ J_0'(0) = 0 \end{cases}$$

Vamos a denotar $\mathcal{L}[J_0](t) = K(t)$. Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad, y usamos las Proposiciones 2.3.1, 2.3.4 y 2.3.3 (Linealidad de la transformada, Derivada de la transformada y Transformada de derivadas de orden superior, respectivamente), tenemos:

$$-\mathcal{L}'[J_0''](t) + tK(t) - J_0(0) - K'(t) = 0$$

Si usamos ahora la Proposición 2.3.3 y sustituimos los valores iniciales:

$$-\left(t^2K(t) - tJ_0(0) - J_0'(0)\right)' + tK(t) - K'(t) = -tK(t) - (t^2+1)K'(t) = 0$$

Obtenemos la EDO de variables separables $(t^2+1)K'(t) + tK(t) = 0$, que, dada una constante c_1, resolvemos de la siguiente manera:

$$\frac{K'(t)}{K(t)} = -\frac{t}{t^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \log(K(t)) = -\frac{1}{2}\log(t^2+1) + c_1$$

Por tanto: $K(t) = c_2(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}$, donde c_2 es una constante. Ahora bien, por el Corolario del Teorema del valor inicial (Proposición 2.3.8):

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{c_2 t}{\sqrt{t^2+1}} = c_2 = J_0(0) = 1$$

Así, concluimos que: $\mathcal{L}[J_0](t) = K(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$

Función	**Transformada**
c	$\frac{c}{t}$, $c \in \mathbb{R}$
e^{at}	$\frac{1}{t-a}$, $a \in \mathbb{R}$ y $t > a$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{b^2+t^2}$, $b \in \mathbb{R}$
$\cos(bt)$	$\frac{t}{b^2+t^2}$, $b \in \mathbb{R}$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{t^2-b^2}$, $b \in \mathbb{R}$
$\cosh(bt)$	$\frac{t}{t^2-b^2}$, $b \in \mathbb{R}$
t^n	$\frac{n!}{t^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$
t^r	$\frac{\Gamma(r+1)}{t^{r+1}}$, $r > -1$ y $r \in \mathbb{R}$
$H(t-c)$	$\frac{e^{-ct}}{t}$, $c \geqslant 0$
$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$

Tabla 2.1: Transformada de Laplace de algunas funciones elementales

Capítulo 3

La transformada inversa de Laplace

Este capítulo está basado en enunciados que podemos encontrar en [5], [7], [13], [20], [21] y [23].

3.1. Definición

Hemos visto que en muchos casos es posible calcular la transformada de Laplace mediante integración directa o usando sus propiedades. La pregunta que nos surge ahora es cómo podemos calcular una función f de la cual conocemos su transformada de Laplace. Veremos que, en general, esto no es tarea fácil, aunque existen algunos métodos para calcular determinadas inversas, y otras pueden resolverse por cálculo directo, usando la transformada de las funciones elementales que calculamos en el apartado anterior, y con la ayuda de la linealidad de la transformada inversa.

Definición 3.1.1. ***(Transformada inversa de Laplace)*** Dada una función L, si existe otra función f que sea continua en $[0, +\infty)$ y que satisfaga que $L = \mathcal{L}[f]$, entonces diremos que f es la transformada inversa de Laplace de L, y lo denotaremos por $f = \mathcal{L}^{-1}[L]$.

Proposición 3.1.2. ***(Linealidad de la transformada inversa)*** *Sean F y G dos funciones para las que existen sus transformadas inversas de Laplace, $\mathcal{L}^{-1}[F]$ y $\mathcal{L}^{-1}[G]$, y sean c_1 y c_2 dos constantes, entonces:*

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F + c_2G] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F] + c_2\mathcal{L}^{-1}[G]$$

Demostración. Por definición, sabemos que existen dos funciones f y g tales que $\mathcal{L}^{-1}[F] = f$ y $\mathcal{L}^{-1}[G] = g$, entonces $F = \mathcal{L}[f]$ y $G = \mathcal{L}[g]$. Así, usando la Proposición 2.3.1 (*Linealidad de la transformada*) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[c_1F + c_2G] &= \mathcal{L}^{-1}[c_1\mathcal{L}[f] + c_2\mathcal{L}[g]] = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[c_1f + c_2g]] = \\ &= c_1f + c_2g = c_1\mathcal{L}^{-1}[F] + c_2\mathcal{L}^{-1}[G] \end{aligned}$$

■

3.2. Métodos para calcular la transformada inversa

Como dijimos al principio de la Sección 3.1, vamos a enunciar una serie de métodos que nos permitirán calcular la transformada inversa de Laplace de determinadas funciones.

3.2.1. Teorema de convolución

Podemos usar el *Teorema de convolución* (Proposición 2.3.12) para calcular la transformada inversa de un producto de funciones, con la ayuda de las transformadas de las funciones elementales que calculamos previamente.

Ejemplo 3.2.1. Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{t(t-2)}\right](t)$.

Por el *Teorema de convolución*, tenemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t(t-2)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t}\right](t) \star \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t-2}\right](t)$$

Así que usando las ecuaciones (2.3) y (2.4):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t(t-2)}\right](t) = 1 \star e^{2t} = \int_0^t e^{2z}dz = \left[\frac{1}{2}e^{2z}\right]_{z=0}^{z=t} = \frac{1}{2}(e^{2t}-1)$$

3.2.2. Método de fracciones parciales

Se usa cuando la transformada de Laplace de una cierta función f es un cociente de la forma $\dfrac{p(t)}{q(t)}$, donde p y q son polinomios en t, y el grado de p es menor que el grado de q. Consiste en expresar dicho cociente como suma de fracciones sencillas, y así poder calcular la transformada inversa de cada una de ellas mediante cálculo directo, usando las transformadas de las funciones elementales que ya hemos calculado. El método se desarrolla dependiendo de los factores en los que se descompone q:

- Si q puede descomponerse como producto de **factores lineales diferentes**, de la forma $q(t) = (t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$, donde n es el grado de q y α_k son las raíces de q, $\forall k = 1, ..., n$, entonces se tiene que $\dfrac{p(t)}{q(t)} = \dfrac{A_1}{t-\alpha_1} + \cdots + \dfrac{A_n}{t-\alpha_n}$, donde A_k son constantes a determinar $\forall k = 1, ..., n$.

Ejemplo 3.2.2. Veamos cómo podemos calcular la transformada inversa del ejemplo anterior también por el método de fracciones parciales, y que obtenemos el mismo resultado que usando el *Teorema de convolución*.

Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{t(t-2)}\right](t)$.

En primer lugar, el denominador tiene dos factores, t y $t-2$. Luego tenemos que calcular el valor de dos constantes A y B, de forma que:

$$\frac{1}{t(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-2}$$

Multiplicando entonces la igualdad anterior por $t(t-2)$, tenemos:

$$1 = A(t-2) + Bt$$

Si sustituimos ahora t por 0 y 2, obtenemos:

$$-\frac{1}{2} = A,\ \frac{1}{2} = B$$

Por tanto, usando la Proposición 3.1.2 (*Linealidad de la transformada inversa*) nos queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t(t-2)}\right](t) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-2}\right](t) = \\ &= \frac{1}{2}\left(-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t-2}\right](t)\right)\end{aligned}$$

Y usando por último la ecuación (2.4):

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2}(-1 + e^{2t})$$

- Sea $(t-\alpha)$ uno de los factores en los que se descompone q (**factores lineales repetidos**), que se repite m veces, entonces la parte del desarrollo en fracciones parciales de $\dfrac{p(t)}{q(t)}$ correspondiente al término $(t-\alpha)^m$ viene dado por: $\dfrac{A_1}{t-\alpha} + \dfrac{A_2}{(t-\alpha)^2} + \cdots + \dfrac{A_m}{(t-\alpha)^m}$, donde A_k son constantes a determinar $\forall k = 1, ..., m$.

Ejemplo 3.2.3. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[F](t)$, donde $F(t) = \dfrac{4t}{t^3 - t^2 - t + 1}$.

En primer lugar, descomponemos el denominador en factores:

$$t^3 - t^2 - t + 1 = (t-1)^2(t+1)$$

Así, tenemos que calcular el valor de tres constantes A, B y C, que verifiquen:

$$\frac{4t}{t^3 - t^2 - t + 1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{t+1}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $(t-1)^2(t+1)$ tenemos:

$$4t = A(t-1)(t+1) + B(t+1) + C(t-1)^2$$

Y si sustituimos t por 0, -1 y 1:

$$0 = A - B - C,\ 4 = 2B,\ -4 = 4C+ \quad \Longrightarrow \quad A = 1,\ B = 2,\ C = -1$$

Por tanto, usando ahora la Proposición 3.1.2 (*Linealidad de la transformada inversa*):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4t}{t^3 - t^2 - t + 1}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t-1} + \frac{2}{(t-1)^2} + \frac{-1}{t+1}\right](t) = \\ &= \mathcal{L}^{1}\left[\frac{1}{t-1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(t-1)^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t+1}\right]\end{aligned}$$

Y por último, por las ecuaciones (2.4) y (2.9):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t-1}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(t-1)^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t+1}\right] = \\ &= e^t + 2(t-1) + e^{-t}\end{aligned}$$

- Sea $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$ un **factor cuadrático** de q que se repite m veces, y que no puede reducirse a factores lineales. Entonces la parte del desarrollo en fracciones parciales de $\dfrac{p(t)}{q(t)}$ correspondiente al término $(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^m$ viene dado por:

$$\frac{A_1 t + B_1}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma} + \frac{A_2 t + B_2}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^2} + \cdots + \frac{A_m t + B_m}{(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)^m},$$

donde A_k y B_k son constantes a determinar $\forall k = 1, ..., m$.

Ejemplo 3.2.4. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[F](t)$, donde $F(t) = \dfrac{-t^3+2t^2-t+1}{t^5+2t^3+t}$.

En primer lugar, descomponemos el denominador en factores:

$$t^5+2t^3+t = t(t^2+1)^2$$

Tenemos que calcular entonces el valor de cinco constantes, A, A_1, B_1, A_2 y B_2, tales que:

$$\frac{-t^3+2t^2-t+1}{t^5+2t^3+t} = \frac{A}{t} + \frac{A_1t+B_1}{t^2+1} + \frac{A_2t+B_2}{(t^2+1)^2}$$

Multiplicando la igualdad anterior por $t(t^2+1)^2$ tenemos:

$$-t^3+2t^2-t+1 = A(t^2+1)^2 + (A_1t+B_1)t(t^2+1) + (A_2t+B_2)t$$

Si sustituimos ahora t por 0, podemos calcular A: $A = 1$.
Para calcular el resto de constantes, basta desarrollar los polinomios de ambos lados de la igualdad, e igualar los coeficientes de las incógnitas que tengan el mismo grado:

$$\begin{aligned} -t^3+2t^2-t+1 &= t^4+2t^2+1+A_1t^4+B_1t^3+A_1t^2+B_1t+A_2t^2+B_2t = \\ &= (A_1+1)t^4+B_1t^3+(A_1+A_2+2)t^2+(B_1+B_2)t+1 \end{aligned}$$

Así, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} A_1+1=0 \\ B_1=-1 \\ A_1+A_2+2=2 \\ B_1+B_2=-1 \end{cases}$$

cuya solución es: $A_1=-1$, $B_1=-1$, $A_2=1$ y $B_2=0$.

Por tanto, usando ahora la Proposición 3.1.2 (*Linealidad de la transformada inversa*):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-t^3+2t^2-t+1}{t^5+2t^3+t}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t}+\frac{-t-1}{t^2+1}+\frac{t}{(t^2+1)^2}\right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{t}{t^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t^2+1}\frac{t}{t^2+1}\right] \end{aligned}$$

Y por último, usando el *Teorema de convolución* (Proposición 2.3.12) para el último sumando, y a continuación las ecuaciones (2.3), (2.5) y (2.6), nos queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{t}{t^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t^2+1}\frac{t}{t^2+1}\right] = \\ &= 1-\cos(t)-\sin(t)+\sin(t)\star\cos(t) = \\ &= 1-\cos(t)-\sin(t)+\int_0^t \sin(t-z)\cos(z)dz \end{aligned}$$

Para resolver la integral, basta usar la identidad trigonométrica siguiente: $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$. Luego, haciendo el cambio de variable $u = t-2z$ y teniendo en cuenta que el seno es impar:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F](t) &= 1-\cos(t)-\sin(t)+\frac{1}{2}\int_0^t(\sin(t-2z)+\sin(t))dz = \\ &= 1-\cos(t)-\sin(t)-\frac{1}{4}\int_t^{-t}\sin(u)du+\frac{1}{2}[\sin(t)z]_{z=0}^{z=t} = \\ &= 1-\cos(t)-\sin(t)+\frac{t}{2}\sin(t)\end{aligned}$$

3.2.3. Teorema de expansión

Teorema 3.2.5. ***(Teorema de expansión)*** *Si la transformada de Laplace de una función $f\colon[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$ es un cociente de la forma $\dfrac{p}{q}$, donde p y q son polinomios tales que el grado de p es menor que el grado de q, entonces, si $q'(\alpha_k)\neq 0\ \forall k=1,\dots,n$:*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{q}\right](t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)}e^{t\alpha_k},$$

donde α_k son las raíces, reales o complejas, de la ecuación $q(t)=0\ \forall k=1,\dots,n$, y n es el grado de q.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que el coeficiente líder de q es 1, para poder expresar q como: $q(t)=(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_{n-1})(t-\alpha_n)$.

Así, usando el método de fracciones parciales: $\dfrac{p(t)}{q(t)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{t-\alpha_k}$,

donde A_k es una constante a determinar $\forall k=1,\dots,n$. Entonces:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n}A_k(t-\alpha_1)\dots(t-\alpha_{k-1})(t-\alpha_{k+1})\dots(t-\alpha_n)$$

Lo que implica que:

$$p(\alpha_k) = A_k(\alpha_k-\alpha_1)\dots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\dots(\alpha_k-\alpha_n),$$

$\forall k=1,\dots,n$. Si derivamos ahora q:

$$q'(t) = \sum_{k=1}^{n}(t-\alpha_1)\dots(t-\alpha_{k-1})(t-\alpha_{k+1})\dots(t-\alpha_n)$$

Por lo que:

$$q'(\alpha_k) = (\alpha_k - \alpha_1)\dots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\dots(\alpha_k - \alpha_n),$$

$\forall k = 1, \dots, n$. Por tanto, tenemos que $A_k = \dfrac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)}$ $\forall k = 1, \dots, n$. Sustituyendo, nos queda:

$$\frac{p(t)}{q(t)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)} \frac{1}{t - \alpha_k}$$

Así, usando (2.4) y la linealidad de la transformada inversa, finalizamos la prueba del teorema:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{q}\right](t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{t - \alpha_k}\right](t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(\alpha_k)}{q'(\alpha_k)} e^{t\alpha_k}$$

■

Ejemplo 3.2.6. Determinar $\mathcal{L}^{-1}[F](t)$, donde $F(t) = \dfrac{5t - 15}{t^2 - t - 2}$.

En primer lugar tenemos que se cumple la primera hipótesis del Teorema 3.2.5 (*Teorema de expansión*), ya que si denotamos $p(t) = 5t - 15$ y $q(t) = t^2 - t - 2$, entonces el grado de p es menor que el grado de q, que son 1 y 2, respectivamente.
Calculemos a continuación las raíces y la derivada de q:

- Tenemos que q se puede descomponer como:

  $$q(t) = t^2 - t - 2 = (t + 1)(t - 2)$$

  Por lo que las raíces son -1 y 2, y son simples ($q'(-1) \neq 0$ y $q'(2) \neq 0$).

- La derivada de q viene dada por:

  $$q'(t) = 2t - 1$$

Por tanto, por el Teorema 3.2.5, la transformada inversa de F viene dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{p(-1)}{q'(-1)} e^{-t} + \frac{p(2)}{q'(2)} e^{2t} = \frac{-20}{-3} e^{-t} + \frac{-5}{3} e^{2t} = \frac{20}{3} e^{-t} - \frac{5}{3} e^{2t}$$

Capítulo 4

Resolución de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales

Como ya dijimos al principio del primer capítulo, nuestro objetivo es usar la transformada de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales lineales: problemas con valores iniciales, sistemas diferenciales e incluso ecuaciones en derivadas parciales. Ahora que ya tenemos todas las herramientas para ello, veamos cómo podemos llevar a cabo dicha resolución. Los resultados de este capítulo están basados en [4], [6], [7], [8], [9], [10], [13], [17], [19], [20] y [21].

4.1. Resolución de problemas con valores iniciales

Vamos a considerar un problema con valores iniciales en 0. Los pasos a seguir para la resolución del problema usando la transformada de Laplace son:

1. En primer lugar, dada una ecuación diferencial lineal, vamos a considerar la transformada de Laplace de ambos lados de la igualdad.

2. A continuación, usamos las propiedades de la transformada de Laplace y las condiciones iniciales dadas para obtener una ecuación que depende solamente de la transformada de Laplace de la solución, y despejamos dicha transformada.

3. Por último, basta calcular la transformada inversa a ambos lados de la igualdad mediante cálculo directo o por alguno de los métodos del capítulo anterior.

Observación 4.1.1. Si tenemos un problema con valores iniciales de la forma $y(a) = b$, $y'(a) = c$, donde a, b y c son constantes, con $a \neq 0$, hacemos el cambio $w(t) = y(t + a)$, cambiando t por $t + a$ en la ecuación diferencial, y sustituyendo después y por w. A continuación, aplicamos entonces el método a la ecuación en función de w, y para obtener la solución del problema original basta deshacer el cambio haciendo $y(t) = w(t - a)$.

Observación 4.1.2. En ocasiones, podemos encontrar algún problema cuya solución no tenga transformada de Laplace, por lo que si intentamos resolverlo mediante este método, nos resultaría imposible calcular la transformada inversa en el último apartado. Para evitar esto, antes del cálculo de la transformada inversa, conviene verificar que se cumple la condición que enunciamos en la Proposición 2.3.7 (*Teorema del valor inicial*), como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.3. Resolver el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2ty' - 4y = 1 \\ y'(0) = 0\,,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Consideremos en primer lugar la transformada de Laplace de ambos lados de la igualdad de la ecuación diferencial, y usando la linealidad de la transformada:

$$\mathcal{L}[y''](t) + 2\mathcal{L}[ty'](t) - 4\mathcal{L}[y](t) = \mathcal{L}[1](t)$$

Utilizando ahora las Proposiciones 2.3.3, 2.3.4 y 2.3.2 (*Transformada de derivadas de orden superior, Derivada de la transformada* y *Transformada de la derivada*, respectivamente) y la ecuación (2.3) tenemos:

$$t^2\mathcal{L}[y](t) - ty(0) - y'(0) - 2(\mathcal{L}[y'](t))' - 4\mathcal{L}[y](t) = \frac{1}{t} \quad \Longleftrightarrow$$

$$t^2\mathcal{L}[y](t) - ty(0) - y'(0) - 2(t\mathcal{L}[y](t) - y(0))' - 4\mathcal{L}[y](t) = \frac{1}{t}$$

Sustituyendo ahora los valores iniciales y denotando $\mathcal{L}[y](t) = Y(t)$:

$$t^2Y(t) - 2Y(t) - 2tY'(t) - 4Y(t) = \frac{1}{t} \quad \Longleftrightarrow$$

$$-2tY'(t) + (t^2 - 6)Y(t) = \frac{1}{t} \iff Y'(t) + \left(\frac{3}{t} - \frac{t}{2}\right)Y(t) = -\frac{1}{2t^2}$$

Tenemos una EDO lineal, cuya solución va a ser de la forma $Y(t) = C(t)Y_H(t)$, donde $Y_H(t)$ es la solución de la ecuación homogénea $Y'(t) + \left(\frac{3}{t} - \frac{t}{2}\right)Y(t) = 0$, que viene dada por:

$$\frac{Y_H'(t)}{Y_H(t)} = -\frac{3}{t} + \frac{t}{2} \implies Y_H(t) = t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}},$$

Para calcular $C(t)$, vamos a imponer que $Y(t)$ debe satisfacer la ecuación no homogénea:

$$C'(t)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}} - C(t)3t^{-4}e^{\frac{t^2}{4}} + C(t)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}}\frac{t}{2} + \left(\frac{3}{t} - \frac{t}{2}\right)C(t)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}} = -\frac{1}{2t^2} \Longrightarrow$$
$$C'(t)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}} - \left(\frac{3}{t} - \frac{t}{2}\right)C(t)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}} + \left(\frac{3}{t} - \frac{t}{2}\right)C(t)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}} = -\frac{1}{2t^2}$$

Así que despejando ahora $C'(t)$, tenemos que: $C'(t) = -\dfrac{1}{2}te^{\frac{-t^2}{4}}$.
Y si integramos respecto de t: $C(t) = e^{-\frac{t^2}{4}} + a_1$, donde a_1 es un número real.

Por tanto, tenemos que la solución viene dada por:

$$Y(t) = \left(e^{\frac{-t^2}{4}} + a_1\right)t^{-3}e^{\frac{t^2}{4}} \Longleftrightarrow$$
$$Y(t) = \frac{1}{t^3} - a_1\frac{e^{\frac{t^2}{4}}}{t^3},$$

Ahora bien, una vez que tenemos la transformada de la solución, es importante ver que verifica la Proposición 2.3.7 (*Teorema del valor inicial*) antes de calcular la inversa, ya que si no la verifica, es posible que la transformada no exista.

En este caso, podemos ver que, para que se cumpla que $\lim_{t \longrightarrow +\infty} Y(t) = 0$, hay que tomar $a_1 = 0$, y nos quedaría $Y(t) = \dfrac{1}{t^3}$. Si aplicamos la ecuación (2.9), concluimos entonces que la solución viene dada por: $y(t) = \dfrac{1}{2}t^2$.

Observación 4.1.4. Observemos que no siempre va a ser posible resolver EDO's usando la transformada de Laplace. Si tenemos por ejemplo el siguiente problema:

$$\begin{cases} y'' + \sin(t)y' - y = 1 \\ y'(0) = 0,\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Nos encontramos con que no es nada fácil calcular $\mathcal{L}[\sin(t)y'](t)$. Así, concluimos que vamos a poder resolver EDO's cuando la incógnita o sus derivadas estén multiplicadas solo por polinomios, exponenciales o función de Heaviside en t (Teorema 2.3.10, de traslación).

Observación 4.1.5. (Comparación con la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*)

En la asignatura del segundo curso del Grado en Matemáticas titulada *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* se estudia el problema de valores iniciales local y globalmente. Para resolver este tipo de problemas clasificamos las ecuaciones diferenciales de primer grado en varios tipos, y asignamos una resolución a cada tipo (EDOs de tipo variables separables, de variables separadas, de Bernoulli, de Ricatti, lineales, homogéneas, étc). Por último, usamos las condiciones iniciales para determinar las constantes.

En cambio, usando la transformada de Laplace todos estos cálculos se simplifican a tener que usar algunas propiedades de la transformada, multiplicar, dividir, calcular la transformada inversa y sustituir los valores iniciales, procedimiento más rápido y fácil que el anterior. El único inconveniente que podemos añadir es que no podemos usar la transformada de Laplace en EDOs de primer orden no lineales respecto de la incógnita, ya que no tenemos forma de calcularla.

Nótese que los problemas de valores iniciales con EDOs de orden mayor que 1 los estudiaremos en la sección 4.2., transformándolos previamente en un sistema diferencial ordinario.

4.1.1. La función de respuesta al impulso

Otro método de resolución de problemas con valores iniciales, en concreto para ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, se obtiene usando la **función de respuesta al impulso**. Antes de enunciar la proposición que da lugar al método, vamos a definir dicha función.

Definición 4.1.6. ***(Función de transferencia)*** Consideremos el problema de valores iniciales:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \tag{4.1}$$

donde a,b y c son constantes, y $g(t)$ es una función con $t > 0$. Se define la función de transferencia del problema (4.1) como: $T(t) = \dfrac{\mathcal{L}[y](t)}{\mathcal{L}[g](t)} = \dfrac{1}{at^2 + bt + c}$.

Observación 4.1.7. La función de transferencia del problema de valores iniciales (4.1) se obtiene de la siguiente forma:

Primero, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación del problema y usamos la linealidad de la transformada, por lo que nos queda:

$$a\mathcal{L}[y''](t) + b\mathcal{L}[y'](t) + c\mathcal{L}[y](t) = \mathcal{L}[g](t)$$

Usando ahora las Proposiciones 2.3.2 y 2.3.3 (*Transformada de la derivada* y *Transformada de derivadas de orden superior*, respectivamente):

$$at^2\mathcal{L}[y](t) - aty(0) - ay'(0) + bt\mathcal{L}[y](t) - by(0) + c\mathcal{L}[y](t) = \mathcal{L}[g](t)$$

Sustituyendo los valores iniciales y despejando:

$$at^2\mathcal{L}[y](t) + bt\mathcal{L}[y](t) + c\mathcal{L}[y](t) = \mathcal{L}[g](t) \iff$$
$$(at^2 + bt + c)\mathcal{L}[y](t) = \mathcal{L}[g](t) \iff T(t) = \frac{\mathcal{L}[y](t)}{\mathcal{L}[g](t)} = \frac{1}{at^2 + bt + c}$$

Definición 4.1.8. ***(Función respuesta al impulso)*** La función respuesta al impulso para el problema (4.1) se define como:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[T](t)$$

Proposición 4.1.9. *Sea I un intervalo que contiene al origen. Entonces la solución del problema $ay'' + by' + cy = g(t)$, $y(0) = y_1$, $y'(0) = y_2$, viene dada por:*

$$y(t) = (h \star g)(t) + y_H,$$

donde a,b y c son constantes, g es continua en I, h es la función de respuesta al impulso para el sistema, e y_H es la solución de $ay'' + by' + cy = 0$, $y(0) = y_1$, $y'(0) = y_2$.

Demostración. Vamos a separar el problema $ay''+by'+cy = g(t)$, $y(0) = y_1$, $y'(0) = y_2$ en dos partes:

$$aw'' + bw' + cw = g(t)\ ,\ w(0) = 0\ ,\ w'(0) = 0; \tag{4.2}$$
$$az'' + bz' + cz = 0\ ,\ z(0) = y_1\ ,\ z'(0) = y_2. \tag{4.3}$$

Entonces, la solución de nuestro problema será igual a la suma de las soluciones de (4.2) y (4.3).

La solución de (4.2) puede calcularse fácilmente a partir de la definición de la función de transferencia, ya que usando la Proposición 2.3.12 (*Teorema de convolución*):

$$T(t) = \frac{\mathcal{L}[w](t)}{\mathcal{L}[g](t)} \iff T(t)\mathcal{L}[g](t) = \mathcal{L}[w](t) \iff$$
$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(t)\mathcal{L}[g](t)](t) = (h \star g)(t)$$

Si llamamos ahora $z = y_H$ a la única solución de (4.3), entonces se tiene que:

$$y(t) = w(t) + z(t) = (h \star g)(t) + y_H$$

■

4.1.2. Impulsos y la función delta de Dirac

Es muy común describir algunos problemas físicos o de ingeniería, en los que se tratan fuerzas de gran tamaño y de breve duración, usando la función delta de Dirac. Vamos a ver que con la ayuda de la transformada de Laplace y de la función respuesta al impulso definida en el apartado anterior muchos de estos problemas pueden resolverse con facilidad.

Definición 4.1.10. ***(Función delta de Dirac)*** [13] La función delta de Dirac, denotada como $\delta(t)$, es una función generalizada que viene dada por la siguiente fórmula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

para cualquier función $f(t)$ continua en un intervalo abierto que contenga a 0, y $\forall a \in \mathbb{R}$.

Observación 4.1.11. A veces, se expresa, de manera informal, la función delta de Dirac como una función definida a trozos de la forma:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

Proposición 4.1.12. ***(Propiedades de la función delta de Dirac)*** *Consideremos la función delta de Dirac de la Definición 4.1.10, $\delta(t)$, y sea f una función continua en un intervalo abierto que contenga a 0. Entonces:*

1. *La transformada de Laplace de la función delta de Dirac viene dada por:*

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](t) = e^{-at} \qquad , a \geq 0 \tag{4.4}$$

2. *La función delta de Dirac y la función de Heaviside definida en (2.2) están relacionadas de la siguiente manera:*

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(s-a)ds = H(t-a) \tag{4.5}$$

Demostración. 1. La transformada de Laplace de la función delta de Dirac puede deducirse fácilmente de la definición, ya que si tomamos $f(t) = e^{-ts}$ y $a \geqslant 0$, considerando la función de Heaviside de la Definición 2.2, tenemos:

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](t) = \int_{0}^{+\infty} \delta(s-a)e^{-st}ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s-a)e^{-st}H(s)ds = e^{-at}H(a) = e^{-at}$$

2. La función delta de Dirac y la función de Heaviside de (2.2) están relacionadas, usando también la definición con $f(s) = H(t-s)$, de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(s-a)ds = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geqslant a \end{cases} = H(t-a)$$

■

Para terminar, veamos la utilidad que tiene la función de respuesta al impulso en un sistema que está descrito con la función delta de Dirac. Consideremos el sistema:

$$ay'' + by' + cy = \delta(t) \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0$$

Hemos visto que la función de transferencia venía dada por $T(t) = \dfrac{\mathcal{L}[y](t)}{\mathcal{L}[g](t)}$, y la de respuesta al impulso por $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[T](t)$, donde en este caso $g(t) = \delta(t)$.

Ahora bien, usando (4.4), sabemos que $\mathcal{L}[\delta(t)](t) = 1$, por lo que sustituyendo en la definición de transferencia queda:

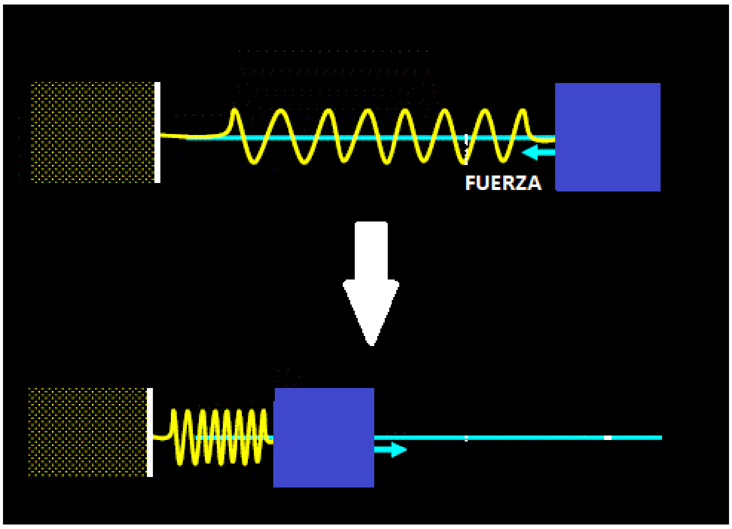
$$T(t) = \mathcal{L}[y](t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = h(t)$$

En resumen, hemos comprobado que si tenemos un sistema de la forma:

$$ay'' + by' + cy = \delta(t) \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0$$

donde $\delta(t)$ es la función de delta de Dirac, entonces su solución viene dada por $y(t) = h(t)$, donde $h(t)$ es la función de respuesta al impulso del sistema.

Ejemplo 4.1.13. Vamos a describir un sistema masa-resorte en reposo, golpeado por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa sin rozamiento, tal y como se muestra en la siguiente imagen[1]:



Si $x(t)$ mide la posición de la masa en cada instante de tiempo t, el sistema quedaría descrito mediante el problema de valores iniciales siguiente:

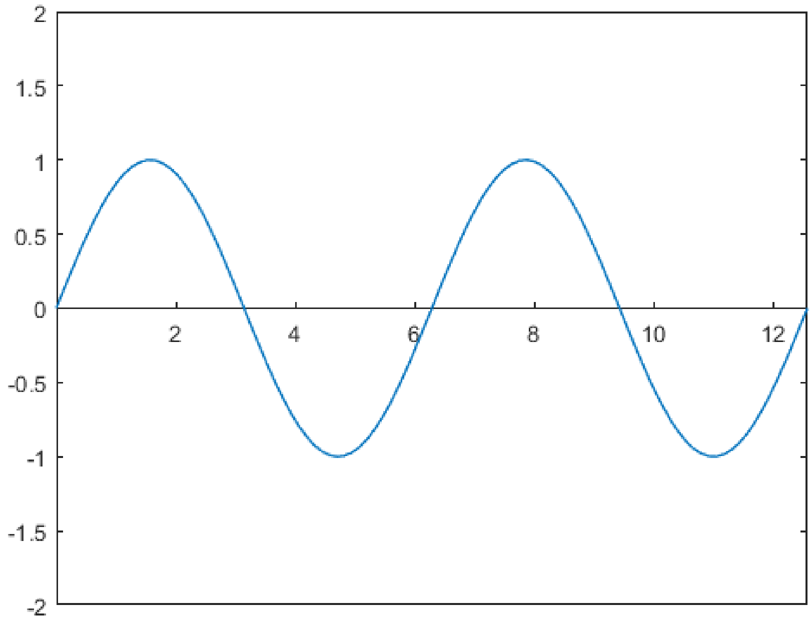
$$\begin{cases} x'' + x = \delta(t) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Hemos probado que la solución al problema viene dada por: $y(t) = h(t)$, con $h(t)$ la función de respuesta al impulso del problema. Calculemos $h(t)$:

La función transferencia del problema viene dada por: $T(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, así que usando la ecuación (2.5) tenemos que $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[T](t) = \sin(t)$.

Por tanto, concluimos que la solución al problema de valores iniciales dado es $x(t) = \sin(t)$, la cual viene representada en la siguiente gráfica:

[1]Imagen tomada de *http://www.fatela.com.ar/trabajo_final_svga/5pag3.htm*



4.1.3. Principio de Duhamel (función de Heaviside)

En este caso, trataremos de nuevo con un sistema del tipo:

$$ay'' + by' + cy = g(t)\ ,\ y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0 \tag{4.6}$$

Vamos a considerar la función de Heaviside, $H(t-c)$ definida en (2.2), con $c = 0$, y que vamos a denotar $H = H(t)$. En el caso de tomar $g = H$, a la solución del sistema se le llama **respuesta indicial** (o respuesta al escalón, o admisión indicatriz), y se le denota A. El sistema por tanto quedaría:

$$aA'' + bA' + cA = H(t)\ ,\ A(0) = 0\ ,\ A'(0) = 0$$

Teorema 4.1.14. ***(Principio de Duhamel)*** *Una solución de la ecuación (4.6) viene dada por:*

$$y(t) = \int_0^t A'(t-z)g(z)dz \qquad ó \qquad y(t) = \int_0^t g'(t-z)A(z)dz + g(0)A(t)$$

Demostración. Si aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación (4.6), y las Proposiciones 2.3.1, 2.3.2, y 2.3.3 (*Linealidad de la transformada, Transformada de la derivada* y *Transformada de derivadas de orden superior*), obtenemos:

$$at^2\mathcal{L}[A](t) - atA(0) - aA'(0) + bt\mathcal{L}[A](t) - bA(0) + c\mathcal{L}[A](t) = \mathcal{L}[H](t) = \frac{1}{t} \implies$$
$$(at^2 + bt + c)\mathcal{L}[A](t) = \mathcal{L}[H](t) = \frac{1}{t} \implies \mathcal{L}[A](t) = \frac{1}{t}\frac{1}{at^2+bt+c} = \frac{1}{t}\,T(t)$$

Ahora bien, de la definición de función de transferencia del sistema original, sabemos que dada una función g , $T(t) = \dfrac{\mathcal{L}[y](t)}{\mathcal{L}[g](t)}$. Por tanto:

$$\frac{1}{t}\mathcal{L}[y](t) = \frac{1}{t}T(t)\mathcal{L}[g](t) = \mathcal{L}[A](t)\mathcal{L}[g](t) = \mathcal{L}[A \star g](t) = \mathcal{L}\left[\int_0^t A(t-z)g(z)dz\right](t),$$

donde se ha usado la Proposición 2.3.12 (*Teorema de convolución*). Si aplicamos a esto la Proposición 2.3.2 y el Teorema 2.2.6 (*Transformada de la derivada y Unicidad de la transformada*), nos quedaría:

$$\mathcal{L}[y](t) = t\mathcal{L}\left[\int_0^t A(t-z)g(z)dz\right](t) = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\int_0^t A(t-z)g(z)dz\right](t) \implies$$
$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t A(t-z)g(z)dz$$

Basta ahora tener en cuenta el Teorema 7.1.3 (*Regla de Leibniz generalizada*) para obtener:

$$y(t) = \int_0^t A'(t-z)g(z)dz + A(0)g(t) = \int_0^t A'(t-z)g(z)dz \tag{4.7}$$

Por último, como $A \star g = g \star A$ (propiedad que puede encontrarse en la Proposición 7.2.1), y usando de nuevo la Proposición 2.3.2 (*Transformada de la derivada*):

$$\frac{1}{t}\mathcal{L}[y](t) = \mathcal{L}[g \star A](t) = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-z)A(z)dz\right](t) \implies$$
$$y(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-z)A(z)dz$$

Por lo que, siguiendo el mismo procedimiento, por la regla de Leibniz generalizada (Teorema 7.1.3):

$$y(t) = \int_0^t g'(t-z)A(z)dz + g(0)A(t) \tag{4.8}$$

■

En resumen, a las ecuaciones (4.7) y (4.8) se les llama fórmulas de Duhamel, y cada una proporciona una solución del sistema original para una función g en función de la respuesta A a la función escalón.

4.2. Resolución de sistemas lineales

Podemos usar también la transformada de Laplace para la resolución de sistemas lineales con más de una incógnita y de cualquier orden. Consiste en aplicar la transformada a ambos lados de la igualdad de todas las ecuaciones, y usando las propiedades de la transformada y las condiciones iniciales, quedaría un sistema de ecuaciones algebraicas cuyas incógnitas son las transformadas de Laplace de las incógnitas del sistema inicial, que podrá resolverse más fácilmente que el problema inicial. Finalmente, solo queda aplicar la transformada inversa para tener la solución de las incógnitas del problema original.

Ejemplo 4.2.1. Resolver el siguiente sistema usando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x' - 3x + 2y = 0 \\ y' + 2x - 3y = 0 \\ x(0) = 1\,,\ y(0) = 1 \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a aplicar la transformada a ambos lados de la igualdad de la primera ecuación, y usando la linealidad de la transformada (Proposición 2.3.1) tenemos:

$$\mathcal{L}[x'](t) - 3\mathcal{L}[x](t) + 2\mathcal{L}[y](t) = 0$$

Ahora bien, denotemos $X(t) = \mathcal{L}[x](t)$ e $Y(t) = \mathcal{L}[y](t)$. Si aplicamos la Proposición 2.3.2 (*Transformada de la derivada*), y sustituimos los valores iniciales, nos queda:

$$tX(t) - x(0) - 3X(t) + 2Y(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (t-3)X(t) + 2Y(t) = 1$$

Así, procediendo de forma análoga con la segunda ecuación, obtenemos:

$$2X(t) + (t-3)Y(t) = 1$$

Por tanto, nos queda el sistema de ecuaciones algebraicas siguiente:

$$\begin{cases} (t-3)X(t) + 2Y(t) = 1 \\ 2X(t) + (t-3)Y(t) = 1\ , \end{cases}$$

que si lo resolvemos por sustitución, por ejemplo, obtenemos que:

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{1}{t-1} \\ Y(t) = \dfrac{1}{t-1} \end{cases}$$

Por último, solo queda aplicar la transformada inversa, así que usando la ecuación (2.4), concluimos que la solución al sistema lineal dado es:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^t \end{cases}$$

Observación 4.2.2. (Comparación con la asignatura *Ecuaciones diferenciales ordinarias*)

La resolución de SDOs usando la transformada de Laplace es muy similar a la resolución de problemas de valores iniciales (con EDOs de orden 1), pasando de la resolución de una ecuación a la resolución de un sistema algebraico.

En la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* se usa el teorema dado por el siguiente enunciado:

Consideremos un sistema diferencial ordinario con valores iniciales. Si el problema es de la forma

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

y F es una matriz fundamental del problema, entonces la solución viene dada por:

$$y(t) = F(t)F^{-1}(t_0)y_0 + F(t)\int_{t_0}^{t} F^{-1}(s)b(s)ds$$

Puede observarse la gran diferencia en cuanto a rapidez y sencillez entre aplicar un método u otro. No tener la necesidad de integrar o derivar se convierte en una ventaja enorme para poder hallar la solución de forma más óptima.

4.3. Resolución de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno

Para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, procederemos de forma análoga a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias: aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad en la ecuación y sustituimos los valores iniciales. La diferencia viene a la hora de calcular la transformada de la derivada con respecto a otras variables, ya que para ello hay que usar el Teorema 7.1.2 (*Regla de Leibniz*). Por último, basta imponer las condiciones de contorno para determinar la transformada inversa.

Ejemplo 4.3.1. El siguiente problema de contorno modela el movimiento de una cuerda semiinfinita a la que se le aplica una fuerza en el extremo izquierdo, que se mueve en sentido vertical. Inicialmente, la cuerda se encuentra en reposo en posición horizontal, e imponemos que en el extremo derecho no se le aplique ninguna fuerza, es decir, $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} u(x,t) = 0$. Si llamamos $u(x,t)$ al movimiento de la cuerda en la posición x para cada instante de tiempo t, la situación definida quedaría modelada como sigue:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = f(t) \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad, imponiendo que, fijado x, u sea de orden exponencial α:

- Primero, por la Proposición 2.3.3 (*Transformada de derivadas de orden superior*):

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right](x,t) = t^2 \mathcal{L}[u](x,t) - tu(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = t^2 \mathcal{L}[u](x,t)$$

- En segundo lugar, usaremos la definición de la transformada y el Teorema 7.1.2 (*Regla de Leibniz*):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](x,t) &= \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_0^b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)\, e^{-ts} ds = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_0^b u(x,s)\, e^{-ts} ds = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}[u](x,t) \end{aligned}$$

Así, si denotamos $\mathcal{L}[u](x,t) = U(x,t)$, nos queda la ecuación diferencial:

$$t^2 U(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t),$$

Para resolver dicha ecuación aplicaremos el método de separación de variables. Buscaremos una solución de la forma $U(x,t) = X(x)T(t)$. Tiene que cumplirse entonces la siguiente igualdad: $t^2 XT = c^2 X''T$. Ahora bien, tenemos entonces que:

$$\frac{t^2}{c^2} \frac{T}{T} = \frac{t^2}{c^2} = \frac{X''}{X}$$

Tenemos que resolver entonces la ecuación $X'' - \frac{t^2}{c^2}X = 0$. Considerando el polinomio característico asociado $\lambda^2 - \frac{t^2}{c^2} = 0$, cuyas soluciones son $\lambda_1 = \frac{t}{c}$ y $\lambda_2 = -\frac{t}{c}$, nos queda que $X(x) = c_1 e^{\frac{t}{c}x} + c_2 e^{-\frac{t}{c}x}$, donde c_1 y c_2 son constantes.

Nuestra solución por tanto viene dada por: $U(x,t) = T(t)(c_1 e^{\frac{t}{c}x} + c_2 e^{-\frac{t}{c}x})$, y podemos escribirla de la siguiente manera:

$$U(x,t) = A(t)e^{-\frac{tx}{c}} + B(t)e^{\frac{tx}{c}},$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son funciones a determinar.

Ahora bien, imponiendo que $u(x,t)$ sea integrable y usando las dos condiciones que nos quedan:

- Como $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} u(x,t) = 0$ y $|u(x,s)e^{-ts}| \leq e^{s(\alpha - t)}$, entonces usando el Teorema 7.1.5 (*Teorema de convergencia dominada*): $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} U(x,t) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \int_0^{+\infty} u(x,s)e^{-ts}ds = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} u(x,s)e^{-ts}ds = 0$, por lo que si lo imponemos a la solución, obtenemos que $B(t) = 0$.
- Usando la condición de contorno, como tiene que ser que $u(0,t) = f(t)$, entonces se tiene que $U(0,t) = \mathcal{L}[f](t)$, por lo que tiene que ser que $A(t) = \mathcal{L}[f](t)$.

Por tanto, la transformada de la solución viene dada por:

$$U(x,t) = \mathcal{L}[f](t)\, e^{-\frac{tx}{c}}$$

Así, para calcular la solución basta usar la primera fórmula del apartado 2. de la Proposición 2.3.10 (*Teoremas de traslación*) para obtener que:

$$u(x,t) = H(t - \frac{x}{c})f(t - \frac{x}{c})$$

Puede verse entonces el movimiento de la cuerda en las siguientes gráficas. La simulación ha sido llevada a cabo en 3 dimensiones usando el software FreeFem++ (véase [11]). Hemos tomado los datos $f(t) = \sin(t)$ y $c = 1$:

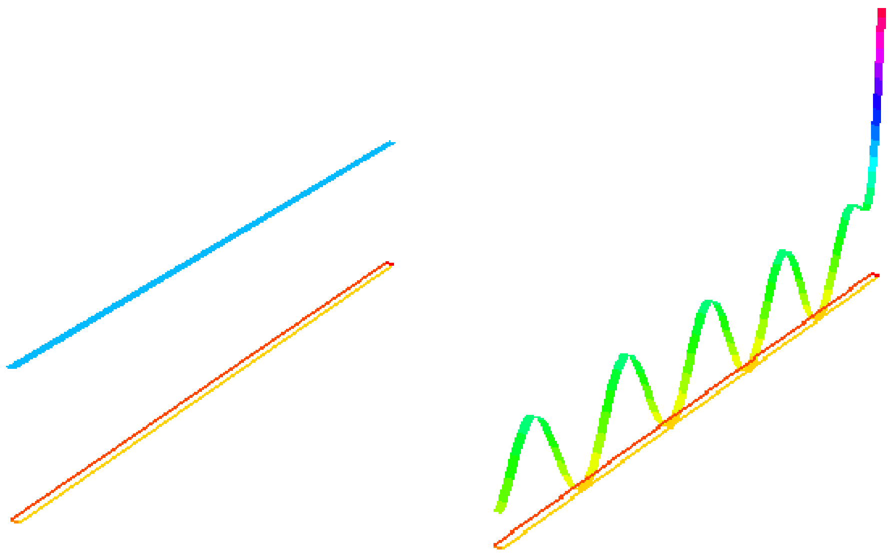


Figura 4.1: Movimiento en tiempos t=0 y t=1, respectivamente.

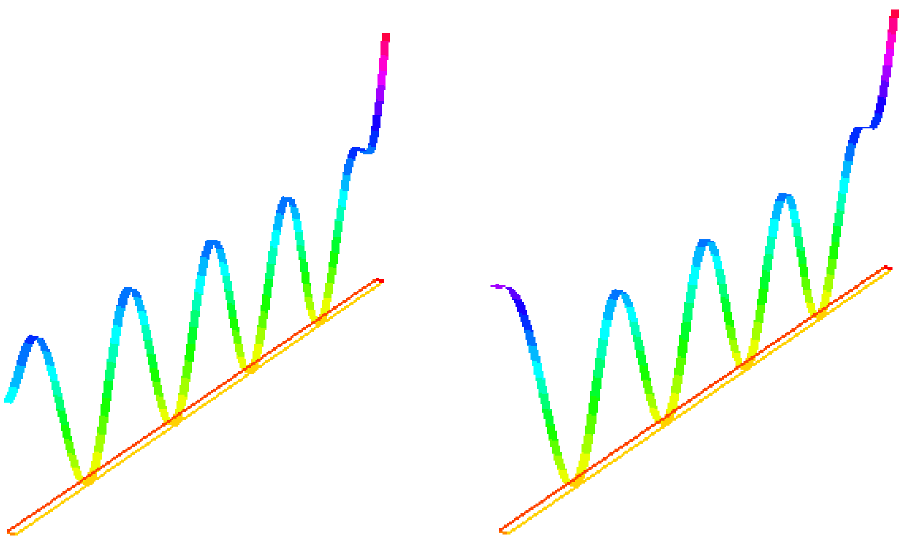


Figura 4.2: Movimiento en tiempos t=2 y t=3, respectivamente.

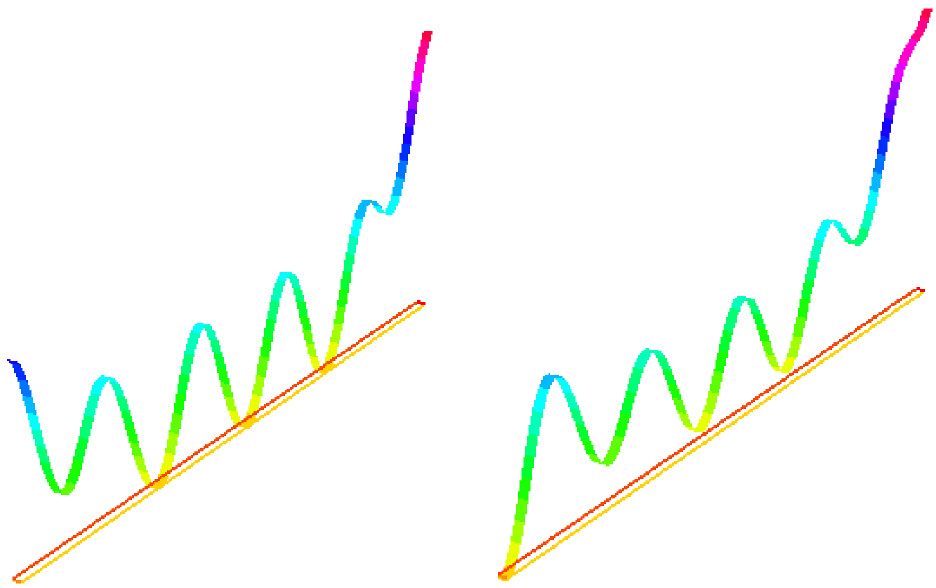


Figura 4.3: Movimiento en tiempos t=5 y t=8, respectivamente.

Observación 4.3.2. (Comparación con algunas asignaturas del grado)

En algunas asignaturas del grado podemos encontrar la resolución de problemas parecidos al ejemplo que presentamos, y también de otro tipo de EDPs.

En cuanto al ejemplo anterior, notar que en las asignaturas *Ecuaciones en derivadas parciales (EDP)* y *Complementos de modelización y optimización numérica (CMON)* se estudian métodos de resolución de la EDP dada. En EDP se estudia la resolución de la ecuación de ondas basada en la ley del paralelogramo, y en CMON calculamos una solución numérica usando el método de Euler.

También, en *Ampliación de ecuaciones diferenciales* estudiamos una forma de resolver ecuaciones en derivadas parciales de primer orden: el método de las características.

4.4. La transformada de Laplace y ecuaciones diferenciales no lineales

Observación 4.4.1. A lo largo de este capítulo hemos visto cómo podemos resolver ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales con la transformada de Laplace, ambas lineales respecto de la variable dependiente (no del parámetro). Pero, ¿qué ocurre cuando son no lineales?

Consideremos, por ejemplo, la ecuación diferencial $y''(t) = y^2(t)$. A la hora de calcular la transformada de Laplace de $y^2(t)$, podemos darnos cuenta de que es imposible, tanto por la definición como usando cualquiera de las propiedades enunciadas anteriormente.

Así, podemos afirmar que la aplicación de la transformada de Laplace se restringe a ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones en derivadadas parciales lineales.

Capítulo 5

Relación con la variable compleja

Podemos observar que, hasta ahora, todos los resultados que hemos enunciado y demostrado han sido sobre funciones reales de variable real. Ahora bien, vamos a ver cómo pueden extenderse a funciones de variable compleja. Vamos a poder deducir la transformada de Laplace a partir de la transformada de Fourier con la ayuda de la variable compleja. De hecho, vamos a ver que la transformada de Laplace es básicamente la restricción al eje imaginario de la extensión al plano complejo de la transformada de Fourier.

Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [5], [12], [16], [18], [20] y [23].

5.1. Teoría de residuos

Enunciaremos previamente algunos resultados referentes a la teoría de residuos que vamos a necesitar.

Definición 5.1.1. (Función holomorfa) [18] Diremos que una función de variable compleja f es holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dicha función es derivable en Ω.

Definición 5.1.2. (Singularidades de una función) [18] Diremos que una función de variable compleja f tiene una singularidad aislada en $a \in \mathbb{C}$ si existe un entorno abierto V de a tal que f es holomorfa en $V \setminus \{a\}$ y f no está definida o no es holomorfa en a. Ahora bien, si f tiene una singularidad en a, puede ser de cualquiera de los tres tipos siguientes:

- Singularidad evitable, si existe $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$.
- Polo, si $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z) = \infty$.
- Singularidad esencial, si no existe $\lim\limits_{z \longrightarrow a} f(z)$.

Definición 5.1.3. (Residuo de una función en un punto)[18] Si $a \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de una función de variable compleja f, de modo que f tiene el desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ en un entorno reducido de a, se llama residuo de f en a al número $Res(f,a) = a_{-1}$. Además, se tiene que:

- Si a es una singularidad evitable, $Res(f,a) = 0$.
- Si a es un polo simple, $Res(f,a) = \lim_{z \longrightarrow a} (z-a)f(z)$.
- Si a es un polo de orden $m \geq 2$, $Res(f,a) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \longrightarrow a} \left(\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] \right)$.

Teorema 5.1.4. ***(Teorema de los residuos)*** *[18] Sea f holomorfa en una región del plano complejo Ω simplemente conexa, excepto en un número finito de singularidades aisladas $z_1, \dots, z_n$. Sea γ una curva de Jordan orientada positivamente tal que $|\gamma| \subset \Omega$ y no corta a ninguna de las sigularidades de f. Entonces:*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{N} Res(f, z_k),$$

donde $z_1, \dots, z_N \in \{z_1, \dots, z_n\}$ son las singularidades encerradas por la curva γ.

5.2. Definición de la transformada de Laplace

Consideremos en primer lugar una función de variable compleja, $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, con $f(t) = 0 \ \forall t < 0$, y consideremos la transformada de Fourier de f que viene dada en la Definición 7.3.1:

$$\mathcal{F}[f](w) = F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

En nuestro caso:

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)f(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt,$$

donde $F \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Ahora bien, si f tiene buen comportamiento cerca del infinito (es decir, cuando t tiende a infinito la función presenta la misma continuidad que en cualquier otro punto, y no se producen saltos) puede afirmarse que $F(w)$ es analítica en el semiplano $Im(w) < 0$. De hecho, usando la Regla de Leibniz (Teorema 7.1.2) su derivada está dada por:

$$\frac{dF(w)}{dw} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} tf(t)e^{-iwt}dt$$

Además, el semiplano $Im(w) < 0$ es apropiado, puesto que $|e^{-iwt}| = e^{Im(w)\,t}$ está acotado en dicho semiplano. Si consideramos entonces w de la forma $w = -is$, con $s > 0$, entonces podemos obtener la función:

$$L(s) = \sqrt{2\pi}\, F(-is) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

A dicha función se le llama transformada de Laplace, y se le denota $L(s) = \mathcal{L}[f](s)$.

Para calcular la transformada inversa de Laplace, vamos a considerar una función g que sea continuamente diferenciable a trozos, y absolutamente integrable en toda la recta real (Definición 7.1.6). Entonces, según la Definición 7.3.3, la Fórmula integral de Fourier de g viene dada por:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt}dk \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-iks}ds$$

Además, vamos a escoger g para que $g(t) = 0$ cuando $t < 0$, y tal que, dada otra función f y fijada una constante $c > 0$, se tenga:

$$g(t) = e^{-ct}f(t)H(t) = e^{-ct}f(t), \qquad t > 0$$

Así, sustituyendo en la fórmula integral de Fourier de g nos queda:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt}dk \int_0^{+\infty} f(s)e^{-s(c+ik)}ds$$

Por último, si hacemos el cambio de variable $r = c + ik$ obtenemos:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(r-c)t}dr \int_0^{+\infty} f(s)e^{-sr}ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{rt}\mathcal{L}[f](r)dr$$

Como la transformada de Laplace de f viene dada por $\mathcal{L}[f](t) = L(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(s)e^{-st}ds$, entonces la transformada inversa de Laplace de L viene dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}[L](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}L(s)ds$$

5.3. Unicidad de la transformada de Laplace

Para demostrar el Teorema de Unicidad enunciado en la Sección 2.2. usaremos la fórmula de la transformada inversa de Laplace que acabamos de deducir.

Sean f y g dos funciones que cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.5., entonces sabemos que:

$$f(t) - g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \mathcal{L}[f-g](s) ds = 0$$

Por tanto, como, fijado t, e^{st} es positiva para todo s, se tiene entonces que $f = g$ casi por doquier.

5.4. Un método para calcular la transformada inversa

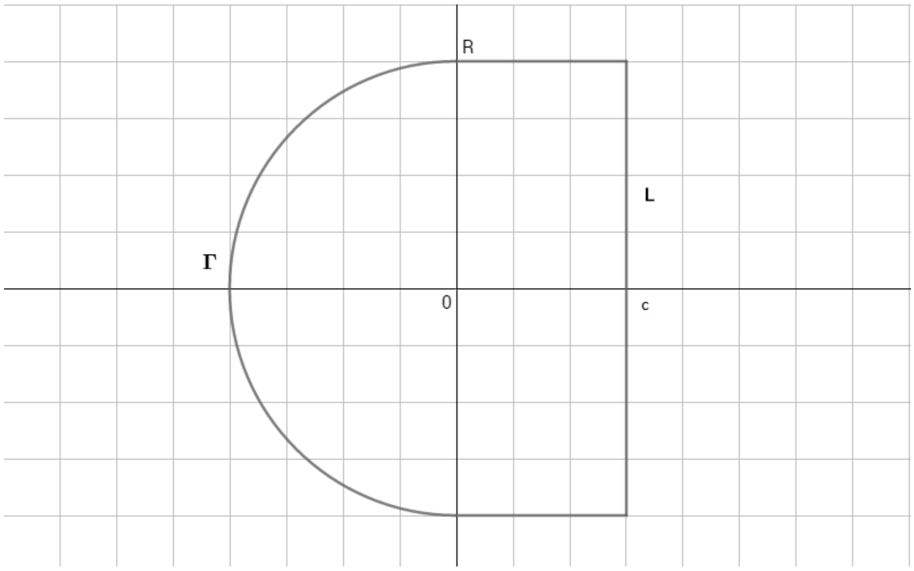
Hemos visto que la transformada inversa de Laplace de una función φ viene dada por:

$$\mathcal{L}^{-1}[\varphi](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \varphi(s)\, ds$$

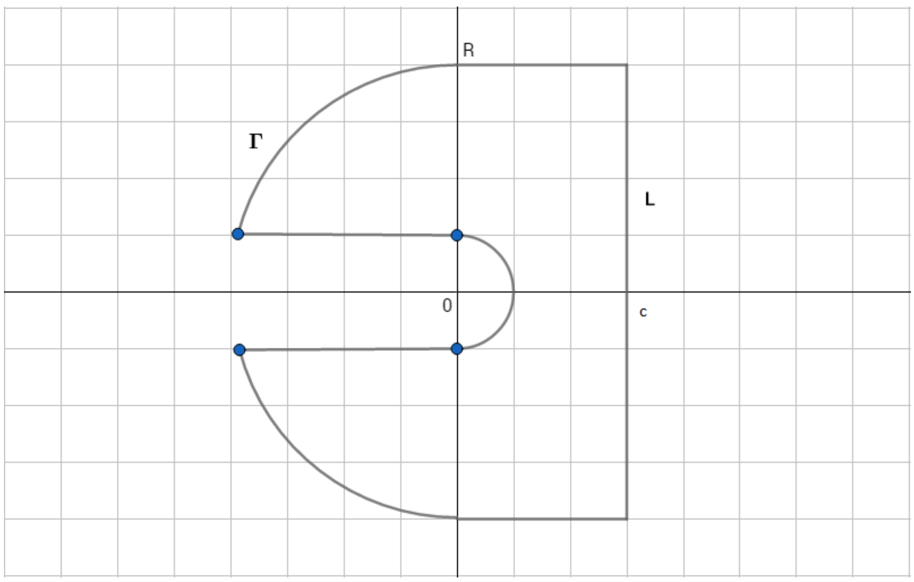
Ahora bien, sabemos que el cálculo de la integral anterior depende de las singularidades de F (véase la Definición 5.1.2), que normalmente tendrá un número finito o infinito numerable de singularidades polares.

Integraremos entonces en la línea recta $s = c + iR$, con $R \in (-\infty, +\infty)$, a la que denotaremos L, tomando c tal que las singularidades del integrando queden a la izquierda de la línea recta L.

En la práctica, el entorno de integración quedará cerrado por un arco de radio R, Γ, tal y como se muestra en la siguiente figura, y tomamos límite $R \longrightarrow \infty$ para expandir el entorno de integración a infinito de modo que todas las singularidades de F queden dentro del conjunto.



Cuando F no esté definida en el origen, podemos modificar el conjunto de integración, haciendo un corte a lo largo del semieje real negativo, y con una semicircunferencia alrededor del origen como se muestra en la siguiente figura.



Así, si llamamos γ al conjunto de integración, nos quedaría:

$$\int_\gamma e^{st}F(s)ds = \int_L e^{st}F(s)ds + \int_\Gamma e^{st}F(s)ds = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(e^{st}F(s), z_i),$$

donde z_i son las singularidades de $e^{st}F(s)$ encerradas por la curva γ, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Además, en muchos problemas de interés se cumple que, si $R \longrightarrow \infty$, la integral en Γ tiende a cero, por lo que al final nos queda:

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = \lim_{R\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{st}F(s)\, ds = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(e^{st}F(s), z_i),$$

donde z_i son las singularidades de F $\forall i = 1, \ldots, k$.

Este resultado es consecuencia directa del Teorema 5.1.4 (teorema de los residuos), y el cálculo de los residuos según el tipo de singularidad se encuentra en la Definición 5.1.3. Dichos enunciados se estudian en la asignatura *Funciones de variable compleja.*

Ejemplo 5.4.1. Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right]$.

Tenemos que $e^{st}F(s) = \dfrac{se^{st}}{(s^2+a^2)^2}$ tiene dos polos dobles en $s = ia$ y $s = -ia$.
Si calculamos los residuos de ambos polos:

$$R_1 = \lim_{s\longrightarrow ai} \frac{d}{ds}\left((s-ia)^2 \frac{se^{st}}{(s^2+a^2)^2}\right) = \lim_{s\longrightarrow ai} \frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{(s+ia)^2}\right) =$$

$$= \lim_{s\longrightarrow ai} \frac{e^{st}(ia-s) + ste^{st}(s+ia)}{(s+ia)^3} = \frac{te^{ait}}{4ia}$$

$$R_2 = \lim_{s\longrightarrow -ai} \frac{d}{ds}\left((s+ia)^2 \frac{se^{st}}{(s^2+a^2)^2}\right) = \lim_{s\longrightarrow -ai} \frac{d}{ds}\left(\frac{se^{st}}{(s-ia)^2}\right) =$$

$$= \lim_{s\longrightarrow -ai} \frac{-e^{st}(ia+s) + ste^{st}(s-ia)}{(s-ia)^3} = -\frac{te^{-ait}}{4ia}$$

Por tanto, tenemos que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = R_1 + R_2 = \frac{t}{2a}\frac{e^{ait} - e^{-ait}}{2i} = \frac{t}{2a}\sin(at)$$

Capítulo 6

Aplicaciones de la transformada de Laplace en otras ciencias

En este capítulo pretendemos mostrar cómo se usa la transformada de Laplace en problemas que surgen en la Ingeniería, la Física, la Química y la Mecanica.

Los ejemplos que se presentan en este capítulo pueden encontrarse citados en [1], [7], [14], [15], [17], [20] y [21].

6.1. Aplicaciones a la teoría de control

6.1.1. Piloto automático de un vehículo I

Consideremos un mecanismo que modela el piloto automático de un vehículo. Este mecanismo aplica un momento de torsión (movimiento rotacional) al eje de dirección, de modo que el vehículo seguirá un curso establecido con anterioridad (servomecanismo).

Si y(t) es la dirección real (el ángulo) del vehículo en el instante t y g(t) es la dirección deseada en el mismo instante, entonces el error entre la dirección deseada y la real viene dado por $e(t) = y(t) - g(t)$.

Supongamos ahora que el mecanismo puede medir el error, $e(t)$, y retroalimentar al eje de dirección mediante un componente del momento de torsión proporcional a $e(t)$, pero opuesto en signo. Ahora bien, sabemos que la segunda ley de Newton, expresada en términos de momentos de torsión, establece que:

$$\text{(momento de inercia)} \times \text{(aceleración angular)} = \text{(momento de torsión total)}$$

Por lo que, si denotamos $I \in \mathbb{R}$ como el momento de inercia del eje de dirección y consideramos $k > 0$ constante, entonces la ecuación que modela la dirección que sigue el vehículo a lo largo del tiempo viene dada por:

$$Iy'' = -ke$$

Ahora bien, vamos a calcular el error $e(t)$ en el caso particular en el que el eje de dirección está inicialmente en reposo en la dirección cero y la dirección deseada está dada por $g(t) = at$, donde $a \in \mathbb{R}$. Para ello, tenemos que resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} Iy''(t) = -k(y(t) - at) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de la igualdad en la ecuación, denotando $Y(t) = \mathcal{L}[y](t)$. Si usamos las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.3, obtenemos:

$$I(t^2Y(t) - ty(0) - y'(0)) = -k\left(Y(t) - \frac{a}{t^2}\right)$$

En segundo lugar, sustituyendo los valores iniciales y despejando $Y(t)$, nos queda:

$$Y(t) = \frac{ka}{t^2(k + It^2)}$$

Ahora bien, si denotamos $E(t) = \mathcal{L}[e](t) = Y(t) - \mathcal{L}[g](t)$, despejando $Y(t)$ tenemos:

$$E(t) = Y(t) - \frac{a}{t^2} = \frac{ka}{t^2(k + It^2)} - \frac{a}{t^2} = -\frac{Ia}{k + It^2}$$

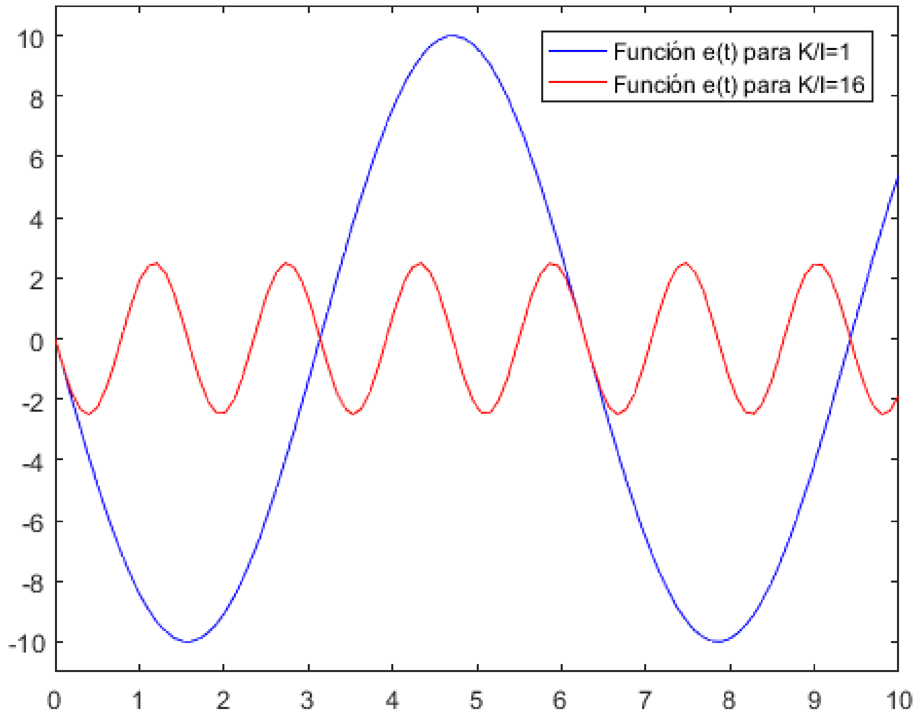
Solo nos queda calcular la transformada inversa de E para conseguir el valor de e, por lo que escribiremos E de la siguiente forma:

$$E(t) = -\frac{Ia}{k + It^2} = -a\,\frac{1}{\frac{k}{I} + t^2} = -\frac{a}{\sqrt{\frac{k}{I}}}\,\frac{\sqrt{\frac{k}{I}}}{\frac{k}{I} + t^2}$$

Así, por la ecuación (2.5), tenemos que:

$$e(t) = -\frac{a}{\sqrt{\frac{k}{I}}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{I}}\,t\right)$$

Para ver el comportamiento que tiene el error, vamos a representar la función para $\frac{k}{I} = 1$ y para $\frac{k}{I} = 16$, con $a = 10$:



Podemos observar por tanto que el piloto oscila de un lado a otro en torno a la dirección deseada. Además, podemos hacer que el error disminuya si hacemos $\frac{k}{I}$ más grande, pero esto también hará que oscile más rápidamente.

Veremos en el siguiente ejemplo de teoría de control cómo estas oscilaciones pueden controlarse mediante un momento de torsión con amortiguamiento proporcional a $e'(t)$ y opuesto en signo.

6.1.2. Piloto automático de un vehículo II

En las mismas condiciones del Ejemplo 6.1.1., vamos a suponer ahora que se añade sobre el eje de dirección un componente adicional del momento de torsión proporcional a $e'(t)$ y opuesto en signo, para así poder controlar las oscilaciones. Así, si consideramos $\mu > 0$, la ecuación que modela ahora la dirección que sigue el vehículo a lo largo del tiempo viene dada por:

$$Iy'' = -ke - \mu e'$$

Vamos a calcular de nuevo el error $e(t)$ para el piloto automático en el caso particular en el que el eje de dirección está inicialmente en reposo en la dirección cero y la dirección deseada está dada por $g(t) = at$, donde $a \in \mathbb{R}$. Consideraremos además amortiguamiento ligero ($\mu < 2\sqrt{Ik}$). Para dicho cálculo, tenemos entonces que resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} Iy''(t) = -k(y(t) - at) - \mu(y'(t) - a) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

En primer lugar, calculamos la transformada de Laplace de ambos lados de la igualdad en la ecuación, denotando $Y(t) = \mathcal{L}[y](t)$. Si usamos las Proposiciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3, obtenemos:

$$I(t^2Y(t) - ty(0) - y'(0)) = -k\left(Y(t) - \frac{a}{t^2}\right) - \mu\left(tY(t) - y(0) - \frac{a}{t}\right)$$

En segundo lugar, sustituyendo los valores iniciales::

$$It^2Y(t) = -k\left(Y(t) - \frac{a}{t^2}\right) - \mu\left(tY(t) - \frac{a}{t}\right)$$

Y por último, despejando $Y(t)$:

$$Y(t) = \frac{a(k + \mu t)}{t^2(It^2 + k + \mu t)}$$

Ahora bien, si denotamos $E(t) = \mathcal{L}[e](t) = Y(t) - \mathcal{L}[g](t)$, sustituyendo $Y(t)$ tenemos:

$$E(t) = Y(t) - \frac{a}{t^2} = \frac{a(k + \mu t)}{t^2(It^2 + k + \mu t)} - \frac{a}{t^2} = -\frac{Ia}{It^2 + k + \mu t}$$

Solo nos queda calcular la transformada inversa de E para conseguir el valor de e.

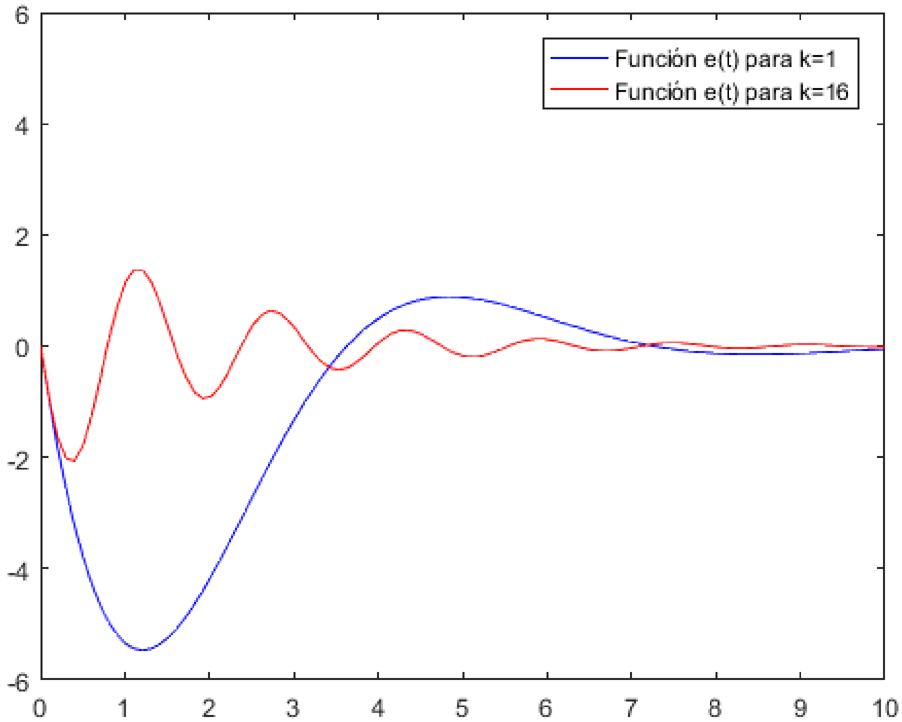
Si denotamos $\alpha_1 = \dfrac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4Ik}}{2I}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4Ik}}{2I}$, si escribimos E de la siguiente forma:

$$E(t) = -\frac{a}{It^2 + k + \mu t} = -a\frac{1}{(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} = -\frac{a}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{1}{t - \alpha_1} - \frac{1}{t - \alpha_2}\right)$$

Así, por la ecuación (2.4), tenemos que:

$$e(t) = -\frac{a}{\alpha_1 - \alpha_2}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

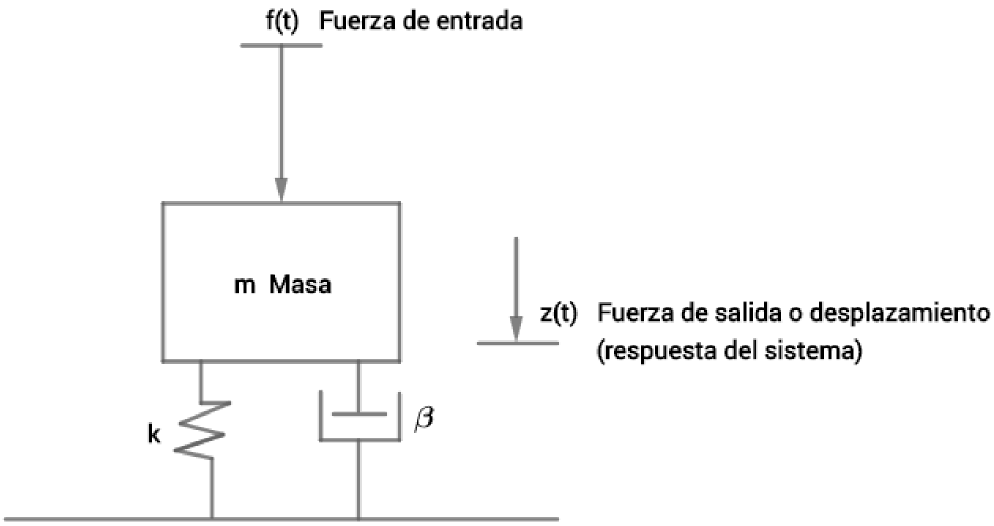
Para ver el comportamiento que tiene el error, vamos a representar la función para $I = 1$, $\mu = 1$ y $a = 10$, con $k = 1$ y $k = 16$ $\left(\frac{k}{I} = 1 \text{ y } \frac{k}{I} = 16\right)$:



Observamos ahora que el error comienza oscilando y teniendo un valor grande, y a medida que va pasando el tiempo lo controlamos de forma que su valor va disminuyendo y las oscilaciones van desapareciendo. Además, podemos conseguir que el error inicial sea menor aumentando el valor de k.

6.1.3. Suspensión de un automóvil

Consideremos un sistema de suspensión de un automóvil de masa m, que viene dado por el siguiente diagrama:



donde k y β son dos constantes del resorte y de amortiguamiento, respectivamente.

Ahora bien, por la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas es igual a la masa por la aceleración. Así, la ecuación que modela este sistema quedaría:

$$f(t) - kz(t) - \beta z'(t) = mz''(t)$$

Considerando las condiciones iniciales nulas, vamos a estudiar la función de transferencia de la ecuación anterior, la cual muestra la relación entre la respuesta del sistema y un cambio en la entrada del proceso, para ver cómo se comporta la suspensión del automóvil cuando la rueda pasa por una irregularidad.

Así, el problema diferencial a resolver viene dado por:

$$\begin{cases} mz''(t) + \beta z'(t) + kz(t) = f(t) \\ z(0) = 0 \\ z'(0) = 0 \end{cases}$$

Vamos a denotar $\mathcal{L}[z](t) = Z(t)$ y $\mathcal{L}[f](t) = F(t)$. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación, y usando las Proposiciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3 nos queda:

$$m(t^2 Z(t) - tz(0) - z'(0)) + \beta(tZ(t) - z(0)) + kZ(t) = F(t)$$

Ahora bien, sustituyendo las condiciones iniciales y despejando la función de transferencia dada en la Definición 4.1.6, obtenemos:

$$\frac{Z(t)}{F(t)} = \frac{1}{mt^2 + \beta t + k}$$

Sean ahora $\alpha_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4mk}}{2m}$ las raíces de la ecuación $mt^2 + \beta t + k = 0$. Entonces usando el método de descomposición en fracciones parciales podemos escribir la función de transferencia anterior como:

$$\frac{Z(t)}{F(t)} = \frac{1}{mt^2 + \beta t + k} = \frac{1}{m(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)} = \frac{1}{m(\alpha_1 - \alpha_2)} \left(\frac{1}{t-\alpha_1} - \frac{1}{t-\alpha_2} \right)$$

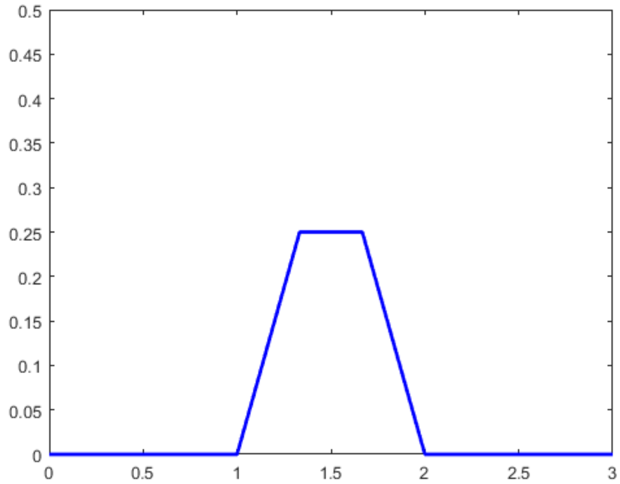
Por último, aplicando la transformada de Laplace inversa a la ecuación anterior y usando la ecuación (2.4) tenemos la función de respuesta al impulso:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Z(t)}{F(t)}\right](t) = \frac{1}{m(\alpha_1 - \alpha_2)}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})$$

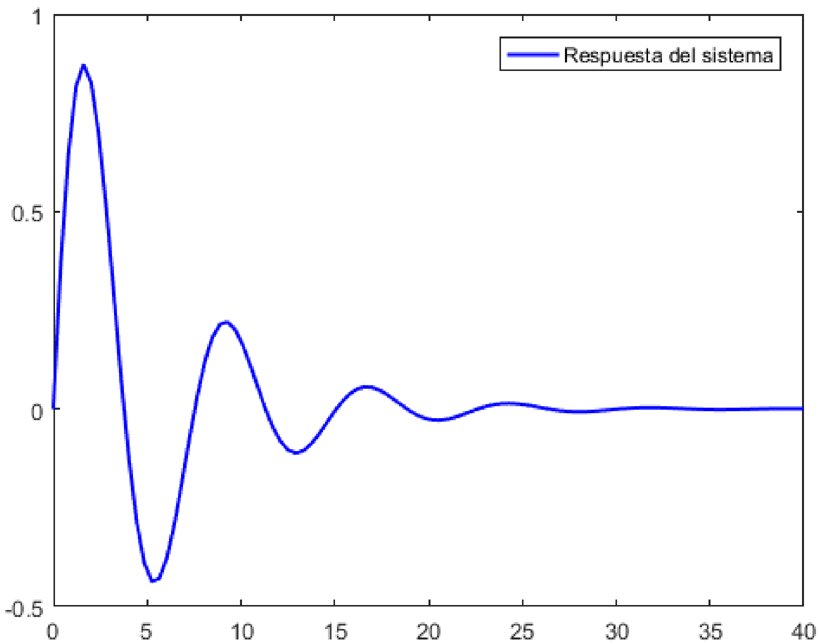
Ahora bien, vamos a representar el movimiento de la suspensión del automóvil considerando los datos $m = 1100kg$, $\beta = 400$ y $k = 800$. La función fuerza de entrada $f(t)$ vendrá dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \frac{3}{4}t - \frac{3}{4} & \text{si } 1 \le t \le \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{4}{3} \le t \le \frac{5}{3} \\ -\frac{3}{4}t + \frac{3}{2} & \text{si } \frac{5}{3} \le t \le 2 \\ 0 & \text{si } t \ge 2 \end{cases}$$

que representará un resalto de 0,25 metros de la siguiente forma:



La representación de la función de respuesta al impulso con los datos anteriormente citados viene dada por la siguiente gráfica:



Puede observarse en la gráfica que, cuando la rueda del coche entra en contacto con una irregularidad en el suelo, el muelle del amortiguador se encoge para absorber el impacto, y entonces el amortiguador absorbe la energía de dicho muelle para evitar que el coche se sacuda mientras recupera su forma original.

6.1.4. Circuito RLC

Los circuitos eléctricos RLC son circuitos lineales con tres elementos básicos:

- Resistencia R: medida en Ohmios, Ω.
- Condensador: que tiene capacidad eléctrica C, medida en Faradios, F.
- Bobina: que tiene inductancia L, medida en Henrios, H.

Las variables asociadas al circuito son: corriente $i(t)$ (medida en amperios, A) y voltaje $e(t)$ (medido en Voltios, V). Además, el flujo de corriente en el circuito está relacionado con la carga $q(t)$ (medida en Coulombs, C) de la siguiente manera: $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$.

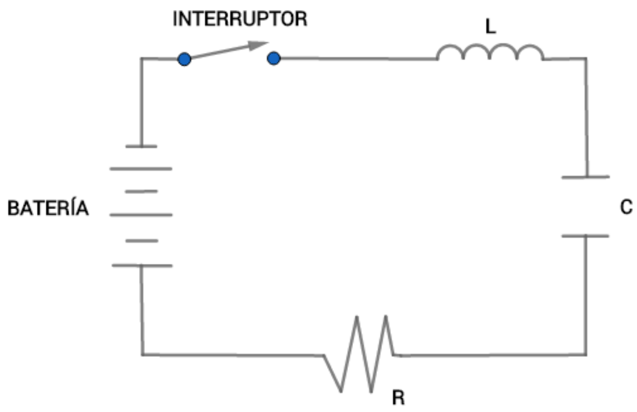
Ahora bien, para poder calcular la ecuación que describe este circuito, tenemos que tener en cuenta las leyes de Kirchhoff:

1. La suma de todas las corrientes que pasan por un nodo es igual a cero.
2. La suma algebraica de las caídas de voltaje en una curva cerrada es igual a cero, donde las caídas de voltaje son:
   - A través de la resistencia: $R\,i(t)$
   - A través del condensador: $\dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt = \dfrac{q(t)}{C}$

Así, nos queda la ecuación:

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t)$$

Vamos a considerar en este caso el problema en el que inicialmente no existe corriente en el circuito ni carga en el condensador. Además, vamos a suponer que el interruptor se cierra en tiempo $t = 0$, para volver luego a abrirse en $t = 1$ y mantenerse así en adelante, y que el circuito tiene una batería que proporciona $90V$ (es decir, $e(t) = 90 - 90H(t-1)$). En estas condiciones, vamos a calcular la corriente resultante del circuito que viene descrito en la siguiente imagen:



Vamos a tomar los datos $R = 110\Omega$, $L = 1H$ y $C = 0,001F$, por lo que nos quedaría el siguiente sistema:

$$\begin{cases} i'(t) + 110\, i(t) + 1000 \displaystyle\int i(t)dt = 90 - 90H(t-1) \\ i(0) = 0\,, \quad q(0) = 0 \end{cases}$$

Ahora bien, si ponemos la ecuación en función de q y sustituimos en $t = 0$, teniendo en cuenta que $i(0) = q'(0) = 0$ y que $q(0) = 0$, obtenemos que:

$$q''(0) + 110\, q'(0) + 1000\, q(0) = q''(0) = 90$$

Podemos ahora volver a poner la ecuación en función de i, sabiendo entonces que $q''(0) = i'(0) = 90$. Por tanto, si derivamos la ecuación en función de i y usamos la ecuación (4.5), tenemos que resolver:

$$\begin{cases} i'' + 110i' + 1000i = -90\delta(t-1) \\ i(0) = 0\,, \quad i'(0) = 90 \end{cases}$$

Vamos a denotar $\mathcal{L}[i](t) = I(t)$. Si aplicamos ahora la transformada de Laplace a la ecuación, y usamos las Proposiciones 2.3.1, 2.3.3 y 2.3.2 (Linealidad, Transformada de derivadas de orden superior y Transformada de la derivada, respectivamente), nos queda:

$$t^2 I(t) - ti(0) - i'(0) + 110(tI(t) - i(0)) + 1000I(t) = -90\mathcal{L}[\delta(t-1)](t)$$

Sustituyendo ahora los valores iniciales y usando la ecuación (4.4):

$$t^2 I(t) - 90 + 110tI(t) + 1000I(t) = -90e^{-t}$$

A continuación, despejamos $I(t)$:

$$I(t) = \frac{90(1-e^{-t})}{t^2+110t+1000}$$

Ahora bien, usando el método de descomposición en fracciones simples, tenemos que:

$$I(t) = \frac{90(1-e^{-t})}{t^2+110t+1000} = \left(1-e^{-t}\right)\left(\frac{1}{t+10} - \frac{1}{t+100}\right) =$$

$$= \frac{1}{t+10} - \frac{1}{t+100} - \frac{e^{-t}}{t+10} + \frac{e^{-t}}{t+100}$$

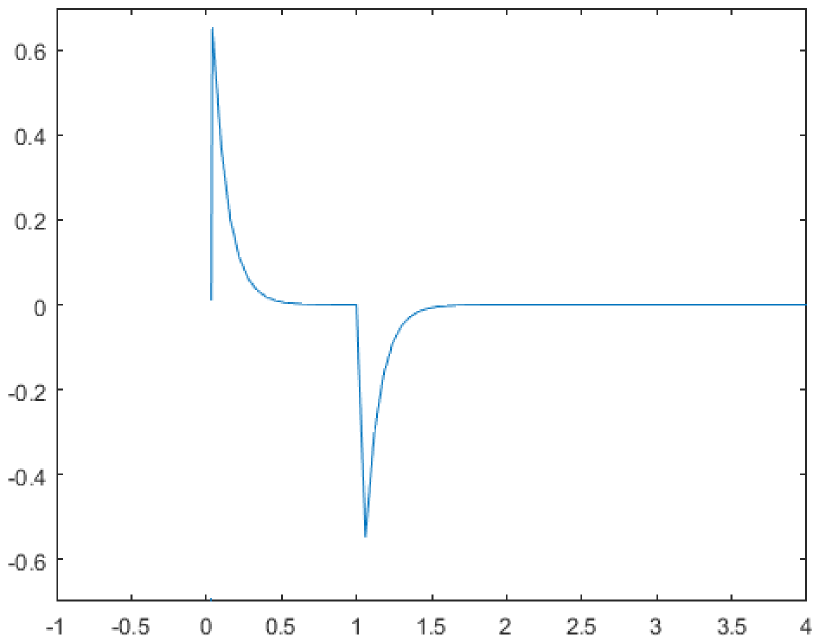
Basta ahora usar ecuación (2.4) y la primera ecuación del apartado 2 del Teorema 2.3.10 (Teorema de traslación):

$$i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - H(t-1)e^{-10(t-1)} + H(t-1)e^{-100(t-1)}$$

Es decir, que la solución viene dada por:

$$i(t) = \begin{cases} e^{-10t} - e^{-100t} & \text{si } t < 1 \\ e^{-10t} - e^{-100t} - e^{-10(t-1)} + e^{-100(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Y puede verse representada en la siguiente gráfica:



6.2. Aplicaciones a la mecánica

Observación 6.2.1. Obsérvese que en los ejemplos 4.1.13 y 4.3.1 podemos encontrar dos sistemas que describen movimientos y que pertenecen también a esta sección. El primero modela el movimiento de una masa golpeada por un martillo y, el segundo, el movimiento de una cuerda semiinfinita a la que se le aplica una fuerza en un extremo.

6.2.1. Problema mecánico de Abel

Vamos a considerar ahora un hilo en forma de curva suave en el que se ha insertado un abalorio de masa m.

Vamos a suponer que el abalorio parte del reposo desde un punto (x, y) y se desliza sin rozamiento hacia el origen. Si la forma del hilo viene dada por una función $y = y(x)$, entonces el tiempo total del descenso será una función $T(y)$ definida de la altura inicial y.

El problema mecánico de Abel es justo el inverso: dada una función $T(y)$, se pide hallar la forma del hilo que produce un tiempo de descenso de $T(y)$.

Ahora bien, para la formulación del problema recordemos en primer lugar el principio de conservación de la energía. Si s es la distancia a través del hilo del origen al abalorio, y (u, v) es el punto donde el abalorio se encuentra, se cumple que:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y-v)$$

Despejando dt de la ecuación anterior obtenemos:

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}$$

Si integramos dt entre $v = y$ y $v = 0$, y escribiendo $ds = \frac{ds}{dv}dv = s'(v)dv$, entonces:

$$T(y) = \int_{v=y}^{v=0} dt = \int_{v=0}^{v=y} \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{s'(v)dv}{\sqrt{y-v}}$$

Ahora bien, sabemos que s viene dada por $s(y) = \displaystyle\int_0^y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$, por lo que su derivada será $f(y) = s'(y) = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Y si sustituimos en la ecuación de $T(y)$ obtenemos la ecuación integral de Abel:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y f(v)\frac{dv}{\sqrt{y-v}} \tag{6.1}$$

Ecuación que permite calcular $T(y)$ siempre que conozcamos la curva y, aunque en nuestro problema vamos a conocer $T(y)$ y la incógnita de la ecuación (6.1) será y. Nótese que $T(y)$ puede escribirse como una convolución:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\, f(y) \star y^{-\frac{1}{2}}$$

Si aplicamos a esta ecuación la transformada de Laplace, por la Proposición 2.3.12 (Teorema de convolución) tenemos:

$$\mathcal{L}[T(y)](t) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\, \mathcal{L}[f(y)](t)\ \mathcal{L}[y^{-\frac{1}{2}}](t)$$

Como conocemos $T(y)$, si despejamos la transformada de Laplace de $f(y)$ y usamos la ecuación (2.11):

$$\mathcal{L}[f(y)](t) = \sqrt{2g}\ \mathcal{L}[T(y)](t)\ \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\ \mathcal{L}[T(y)](t)\ t^{\frac{1}{2}}$$

Así, podremos calcular la curva y sin más que aplicar la transformada inversa a la ecuación anterior y despejarla de la fórmula $f(y) = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$.

En este caso, vamos a calcular la curva que forma el hilo cuando el tiempo de descenso es independiente del punto de partida, es decir, $T(y) = c$, donde c es una constante. Así, usando la ecuación (2.3), nos queda:

$$\mathcal{L}[f(y)](t) = c\,\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\ \frac{t^{\frac{1}{2}}}{t} = c\,\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\ t^{-\frac{1}{2}}$$

Aplicando la transformada inversa y la ecuación (2.11):

$$f(y) = c\,\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\ \mathcal{L}^{-1}\left[t^{-\frac{1}{2}}\right](y) = c\,\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\ y^{-\frac{1}{2}}$$

Si sustituimos el valor de $f(y)$ y llamamos $M = \dfrac{2gc^2}{\pi^2}$:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{M}\ y^{-\frac{1}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \sqrt{\frac{M}{y} - 1}\ dy = \sqrt{\frac{M-y}{y}}\ dy$$

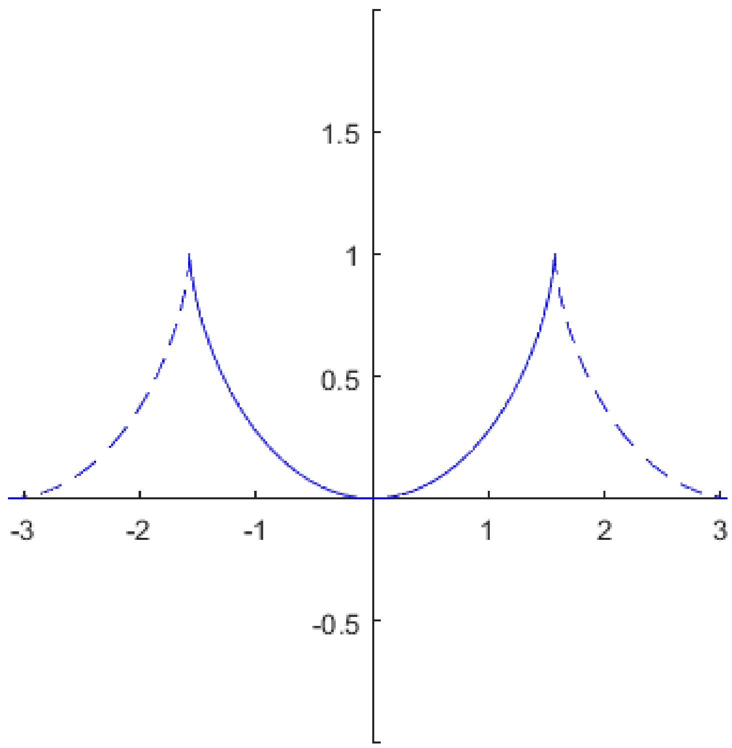
Integrando y aplicando el cambio de variable $y = M\sin^2(\varphi)$:

$$x = \int \sqrt{\frac{M-y}{y}}\ dy = 2M \int \cos^2(\varphi)\ d\varphi = M \int (1+\cos(2\varphi))\ d\varphi = M(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)) + C$$

Como la curva tiene que pasar por el origen, vamos a elegir $C = 0$. Así, podemos concluir que la curva viene dada por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = M(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)) \\ \\ y = M\sin^2(\varphi) \end{cases}$$

Entonces, la forma que tendrá el hilo cuando el tiempo de descenso es independiente del punto de partida vendrá dada por la siguiente gráfica:



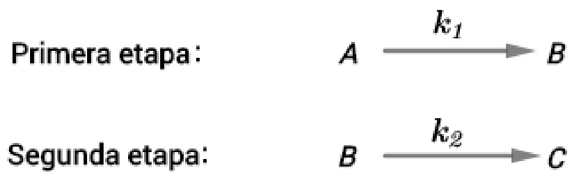
Puede observarse que la curva es una cicloide. Esto es porque la cicloide cumple una propiedad llamada tautócrona: el tiempo tomado por el abalorio que desliza sin rozamiento en gravedad uniforme hasta su punto más bajo es independiente de su punto de partida.

6.3. Aplicaciones a la química

6.3.1. Dos reacciones químicas consecutivas

Consideremos una reacción en la cual un compuesto A se convierte en un compuesto B, y a su vez el compuesto B se convierte en un tercer compuesto C, y donde las concentraciones de dichos compuestos están denotadas por $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$, respectivamente.

El proceso completo puede verse como dos reacciones consecutivas, para lo cual necesitamos plantear dos ecuaciones de velocidad de reacción. En este caso supondremos que las constantes de velocidad son k_1 y k_2 respectivamente, y que en tiempo $t = 0$ solo existen moléculas del compuesto A, con una concentración inicial a_0. Entonces, el mecanismo de la reacción química está descrito por:



Para formular las ecuaciones tengamos en cuenta que:

- EL compuesto A desaparece y se convierte en el compuesto B, por lo que necesitamos añadir un signo negativo en la componente proporcional a a:

$$a' = -k_1 a$$

- El compuesto B está apareciendo en la primera etapa y a la vez desapareciendo en la segunda, por lo que necesitaremos dos componentes: una proporcional a a y positiva, y otra proporcional a b y negativa.

$$b' = k_1 a - k_2 b$$

- El compuesto C aparece en la segunda reacción, por lo que solo tiene una componente positiva y proporcional a b:

$$c' = k_2 b$$

Así, el sistema diferencial a resolver viene dado por:

$$\begin{cases} a' = -k_1 a \\ b' = k_1 a - k_2 b \\ c' = k_2 b \\ a(0) = a_0, \quad b(0) = 0, \quad c(0) = 0 \end{cases}$$

Vamos a denotar $\mathcal{L}[a] = A$, $\mathcal{L}[b] = B$ y $\mathcal{L}[c] = C$. Si aplicamos la transformada de Laplace a las ecuaciones y usamos las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 (Linealidad de la Transformada y Transformada de la derivada, respectivamente), obtenemos:

$$\begin{cases} tA(t) - a(0) = -k_1 A(t) \\ tB(t) - b(0) = k_1 A(t) - k_2 B(t) \\ tC(t) - c(0) = k_2 B(t) \end{cases}$$

Sustituyendo los valores iniciales, queda un sistema algebraico escalonado fácil de resolver:

$$\begin{cases} (t + k_1)A(t) = a_0 \\ -k_1 A(t) + (t + k_2)B(t) = 0 \\ -k_2 B(t) + tC(t) = 0 \end{cases}$$

Puede verse que en la primera ecuación podemos despejar A, que sustituyendo A en la segunda ecuación podemos despejar B, y por último, sustituyendo B en la tercera ecuación obtenemos C, por lo que:

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{a_0}{t + k_1} \\ B(t) = \dfrac{a_0 k_1}{(t + k_1)(t + k_2)} \\ C(t) = \dfrac{a_0 k_1 k_2}{t(t + k_1)(t + k_2)} \end{cases}$$

Para calcular la transformada inversa de A basta usar la ecuación (2.4) :

$$a(t) = a_0 e^{-k_1 t}$$

Para calcular las transformadas inversas de B y C usaremos el método de descomposición en fracciones parciales:

$$B(t) = \frac{a_0 k_1}{(t + k_1)(t + k_2)} = \frac{a_0 k_1}{k_1 - k_2} \left(-\frac{1}{t + k_1} + \frac{1}{t + k_2} \right)$$

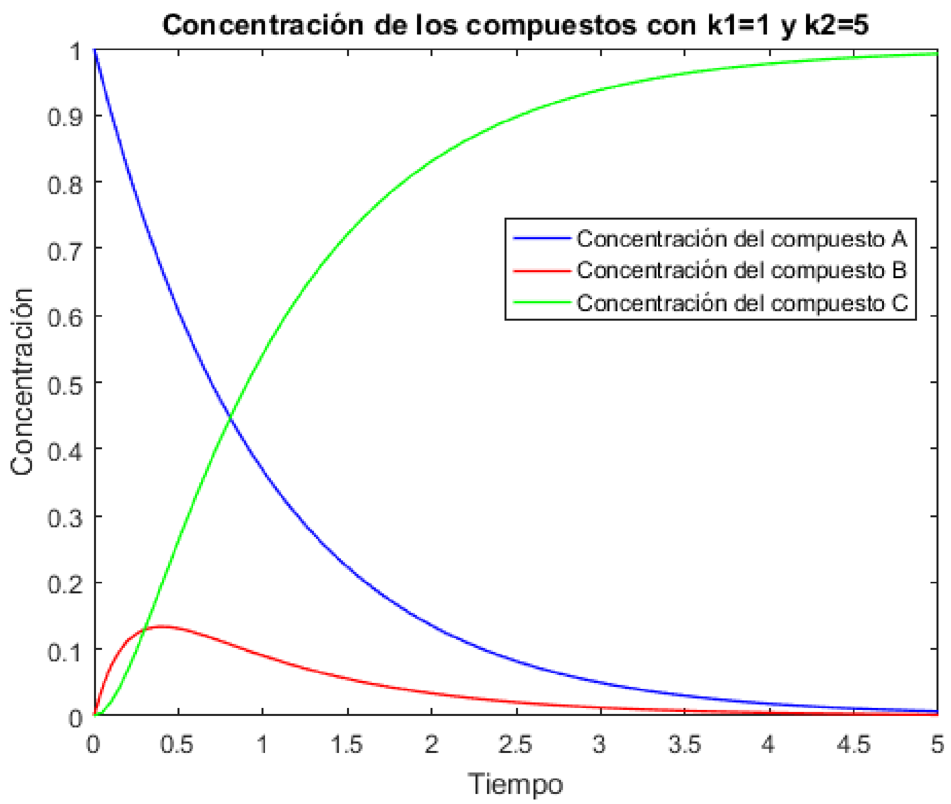
$$C(t) = \frac{a_0 k_1 k_2}{t(t + k_1)(t + k_2)} = \frac{a_0}{t} + \frac{a_0 k_2}{k_1 - k_2} \frac{1}{t + k_1} - \frac{a_0 k_1}{k_1 - k_2} \frac{1}{t + k_2}$$

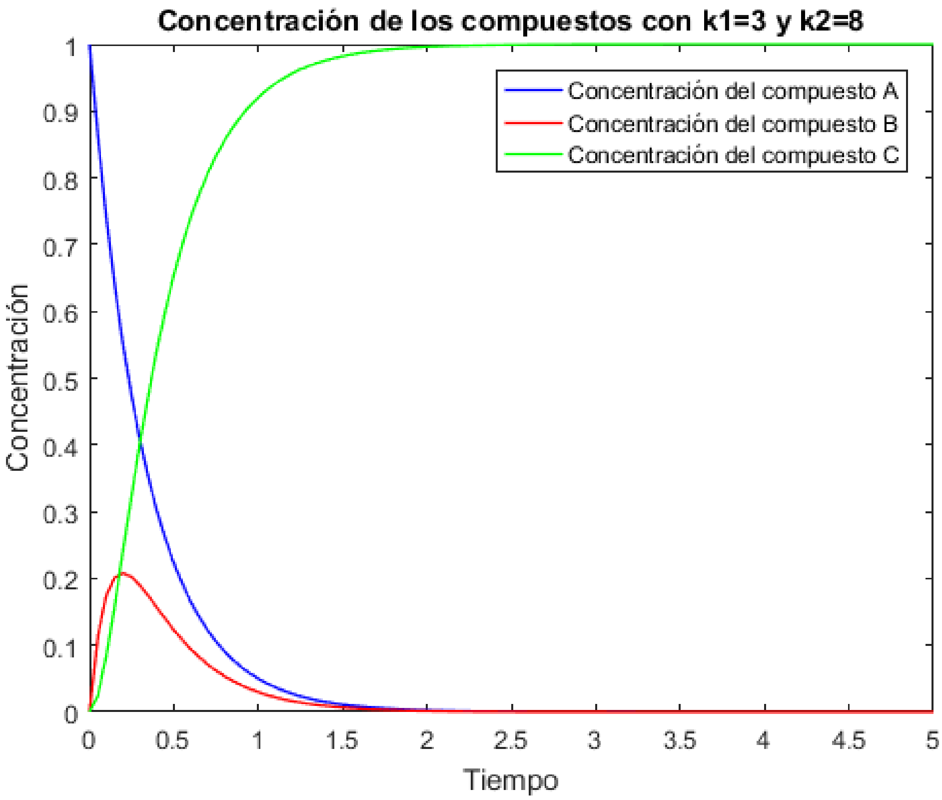
Así, usando de nuevo la ecuación (2.4), nos queda:

$$b(t) = -\frac{a_0 k_1}{k_1 - k_2}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

$$c(t) = a_0 + \frac{a_0 k_2}{k_1 - k_2}\, e^{-k_1 t} - \frac{a_0 k_1}{k_1 - k_2}\, e^{-k_2 t}$$

En las siguientes gráficas podemos ver cómo se comportan las concentraciones de los tres compuestos en función del tiempo, dependiendo del valor de las constantes k_1 y k_2, que dependen de la temperatura de la reacción, y tomando como cantidad inicial del compuesto A, $a_0 = 1$.



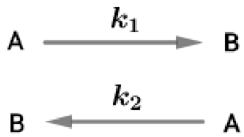


Puede verse cómo, si variamos la temperatura de forma adecuada, podemos acelerar la reacción, ya que en el primer caso la reacción acaba en $t = 5$, y en el segundo caso acaba en $t = 2$.

6.3.2. Reacción química opuesta

Vamos a considerar un ejemplo de reacción química que actúa en direcciones opuestas, llamada reacción de isomerización: un compuesto A se convierte en otro compuesto B, y a su vez, dicho compuesto B se convierte nuevamente en A, tal y como se muestra en el siguiente esquema:

Podemos ver también este proceso como dos reacciones consecutivas, donde las constantes de velocidad son k_1 y k_2, respectivamente, de la siguiente manera:



Denotaremos entonces $a(t)$ y $b(t)$ a las concentraciones de los compuestos A y B, respectivamente. Necesitamos plantear de nuevo dos ecuaciones de velocidad de reacción, suponiendo también que en tiempo $t = 0$ solo hay moléculas del compuesto A, con una concentración $a(0) = a_0$.

- En primer lugar, el compuesto A desaparece debido a a, pero aparece debido a b, por lo que:
$$a' = -k_1 a + k_2 b$$
- Análogamente, el compuesto B desaparece en consecuencia de b, pero aparece debido a a, y así:
$$b' = k_1 a - k_2 b$$

Tenemos por tanto el sistema:

$$\begin{cases} a' = -k_1 a + k_2 b \\ b' = k_1 a - k_2 b \\ a(0) = a_0, \ b(0) = 0 \end{cases}$$

Vamos a denotar $\mathcal{L}[a] = A$ y $\mathcal{L}[b] = B$. Si aplicamos la transformada de Laplace a las ecuaciones y usamos las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 (Linealidad de la transformada y Transformada de la derivada, respectivamente), tenemos:

$$\begin{cases} tA(t) - a(0) = -k_1 A + k_2 B \\ tB(t) - b(0) = k_1 A - k_2 B \end{cases}$$

Si sustituimos ahora los valores iniciales, nos queda el sistema algebraico siguiente:

$$\begin{cases} (t+k_1)A(t) - k_2 B = a_0 \\ -k_1 A(t) + (t+k_2)B(t) = 0 \end{cases}$$

El cual podemos resolver, por ejemplo, por sustitución. De la segunda ecuación tenemos que $B(t) = \dfrac{k_1 A(t)}{t+k_2}$. Sustituyendo este valor de B en la primera ecuación tenemos:

$$(t+k_1)A(t) - \frac{k_1 k_2 A(t)}{t+k_2} = \frac{(t+k_1)(t+k_2)A(t) - k_1 k_2 A(t)}{t+k_2} = \frac{(t^2+k_1 t+k_2 t)A(t)}{t+k_2} = a_0$$

Así, A quedaría despejada como: $A(t) = \dfrac{a_0(t+k_2)}{t^2+k_1 t+k_2 t}$.

Y sustituyendo su valor en la ecuación de B, tenemos que: $B(t) = \dfrac{a_0 k_1}{t^2+k_1 t+k_2 t}$.

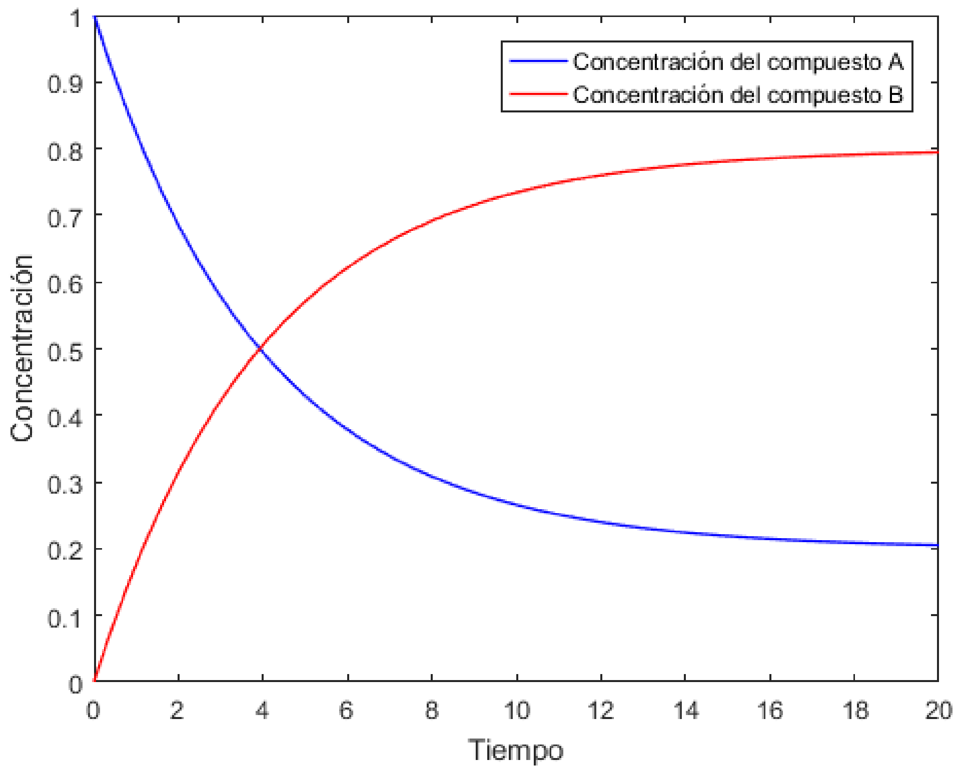
Para calcular sus transformadas inversas, usaremos el método de descomposición en fracciones simples:

$$\begin{cases} A(t) = \dfrac{a_0(t+k_2)}{t^2+k_1 t+k_2 t} = a_0 \dfrac{t+k_2}{t(t+k_1+k_2)} = \dfrac{a_0}{k_1+k_2}\left(\dfrac{k_2}{t} + \dfrac{k_1}{t+k_1+k_2}\right) \\ B(t) = \dfrac{a_0 k_1}{t^2+k_1 t+k_2 t} = \dfrac{a_0 k_1}{t(t+k_1+k_2)} = \dfrac{a_0 k_1}{k_1+k_2}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+k_1+k_2}\right) \end{cases}$$

Basta ahora usar la ecuación (2.4) para obtener:

$$\begin{cases} a(t) = \dfrac{a_0}{k_1+k_2}\left(k_2 + k_1 e^{-(k_1+k_2)t}\right) \\ b(t) = \dfrac{a_0 k_1}{k_1+k_2}\left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right) \end{cases}$$

Veámos ahora el comportamiento que tienen ambos compuestos en función del tiempo, tomando $a_0 = 1$, $k_1 = 0,2$ y $k_2 = 0,05$.



Podemos ver en la gráfica cómo el compuesto A va disminuyendo a la vez que el compuesto B aumenta, hasta que ambos llegan a una cantidad de equilibrio, a la que la concentración de cada elemento converge cuando t tiende a infinito.

Apéndice

7.1. Teoremas de integrabilidad

Teorema 7.1.1. ***(Teorema de comparación de integrales impropias de primera especie)*** *[3] Dada $a \in \mathbb{R}$, sea f, $g\colon [a,+\infty) \longmapsto \mathbb{R}$ tales que ambas son Riemann integrables en los intervalos de la forma $[a,b]$ para todo $b > a$. Supongamos que existe x_0 tal que se verifica que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq x_0$. Entonces se tiene:*

- *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.*
- *Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ diverge.*

Teorema 7.1.2. ***(Regla de Leibniz)*** *[17] Dada una función f, si dicha función es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

Teorema 7.1.3. ***(Regla de Leibniz generalizada** [17]) Dada una función f, si dicha función es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces:*

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt + f(x,b)\frac{db}{dx} - f(x,a)\frac{da}{dx}$$

Teorema 7.1.4. ***(Teorema de Fubini)*** *[2] Dada una función $f(x,y)$ definida en $X \times Y$, cuyo valor absoluto es integrable en $X \times Y$, entonces:*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)dy\right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)dx\right) dy$$

Teorema 7.1.5. ***(Teorema de convergencia dominada)*** *[2] Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables que converge puntualmente a una función medible f. Si existe una función g integrable tal que para todo n se da la desigualdad $|f_n| \leq g$, entonces la función f es integrable y se cumple que:*

$$\int f d\mu = \text{lím} \int f_n d\mu$$

Definición 7.1.6. (Función absolutamente integrable) [5] Se dice que una función f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ existe y es finita.

7.2. Propiedades de la convolución

Proposición 7.2.1. *[?] Sean f, g y h funciones, entonces se tiene:*

- $f \star g = g \star f$
- $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$
- $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$
- $f \star 0 = 0$

7.3. La transformada y la fórmula integral de Fourier

Definición 7.3.1. (Transformada de Fourier) [5] Dada una función f integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$, se define la transformada de Fourier de f, denotada $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$, como:

$$\mathcal{F}[f](k) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)dx$$

Definición 7.3.2. (Transformada inversa de Fourier) [5] Sea f una función para la que existe su transformada de Fourier F, entonces la transformada de Fourier inversa de F se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F](k) = f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} F(x)dx$$

Definición 7.3.3. (Fórmula integral de Fourier) [5] Sea f una función continuamente diferenciable a trozos, y absolutamente integrable en toda la recta real. Entonces se define la Fórmula integral de Fourier de f como:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-iks} ds$$

7.4. La función Gamma

Definición 7.4.1. [20] La función Gamma fue introducida por primera vez con el objetivo de generalizar la función factorial a valores no enteros.

Para $Re(z) > 0$, se define la función Gamma de z como:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} s^{z-1}e^{-s}\, ds$$

Proposición 7.4.2. *[20] Sea* Γ *la función definida en (2.10), entonces:*

- $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$
- $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(1) = 0! = 1$
- $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- $\Gamma(2) = 1! = 1$
- $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
- $\Gamma(3) = 2! = 2$
- $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
- $\Gamma(4) = 3! = 6$

7.5. La función de Bessel

Definición 7.5.1. [20] Definimos la función de Bessel de orden n, donde n puede ser real o complejo, como:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Proposición 7.5.2. *[20] Algunas propiedades importantes de la función de Bessel son:*

- $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$, *si n es un entero positivo.*
- $J_{n+1}(t) = \dfrac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$.
- $\dfrac{d}{dt}(t^n\, J_n(t)) = t^n\, J_{n-1}(t)$.
- $J_n(t)$ *satisface la ecuación diferencial de Bessel:*

$$t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2) y(t) = 0$$

Bibliografía

[1] Albarrán-Zavala, Erik. *Algunas aplicaciones de la transformada de Laplace en Cinética Química, Circuitos Eléctricos y Transferencia de Calor.*

http://www.lajpe.org/dec13/4-LAJPE_818_Erik_Albarran.pdf

Universidad de México (2013).

[2] Apóstol, Tom M.. *Análisis matemático.* Reverté, 2ª edición, Barcelona (1996).

[3] Bernal González, Luis. *Series de funciones e integral de Lebesgue*

http://personal.us.es/lbernal/php/activos/pdf/SFIL.pdf, Universidad de Sevilla (2015).

[4] Braun, Martin. *Differential equations and their applications.*

Springer Verlag (1993).

[5] Debnath, L. and Bhatta, D.. *Integral transforms and their applications.*

CRC Press (2015).

[6] Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Matemático. *Apuntes de la asignatura Ecuaciones en derivadas parciales.*

Asignatura de cuarto curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla (2017/2018).

[7] Edwards, C. Henry y Penney, David E.. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Prentice Hall (2001).

[8] Fernández Cara, Enrique. *Apuntes de la asignatura Complementos de Modelización y Optimización numérica.*

Asignatura de cuarto curso del Grado en Matemáticas (2017/2018).

[9] González Burgos, Manuel. *Apuntes de la asignatura Ampliación de ecuaciones diferenciales.* Asignatura del tercer curso del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla (2016/2017).

[10] Haberman, Richard. *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno.* Prentice Hall, Madrid (2003).

[11] HECHT F.. *New development in Freefem++.*
Journal of Numerical Mathematics (2012), 20: 251-256.

[12] LÓPEZ-GÓMEZ, JULIÁN. *Ecuaciones diferenciales y variable compleja.*
Prentice Hall, Madrid (2002).

[13] NAGLE, R.KENT, SAFF, EDWARD B. Y SNIDER, ARTHUR D.. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.*
Pearson Educación, México (2005).

[14] PAHÚD, FERNANDO M.. *Transformadas de Laplace en circuitos RLC.*
http://lcr.uns.edu.ar/fvc/NotasDeAplicacion/FVC-PahudFernando.pdf
Universidad Nacional del Sur, Argentina (2014).

[15] PÉREZ, ANDRÉS. *Algunas aplicaciones de la transformada de Laplace*
http://www.matematica.ciens.ucv.ve/files/Presentaciones-JIE2016-Matematica/Dr. Andres Perez-Algunas aplicaciones de la Transformada de Laplace.pdf
Universidad de Venezuela (2016).

[16] SAFF, EDWARD Y SNIDER, ARTHUR D.. *Fundamentals of complex analysis with applications to engineering and science.* Prentice Hall (2003).

[17] SIMMONS, GEORGE F.. *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas.*
Mc Graw Hill, Madrid (1993).

[18] STEIN, ELIAS M. Y SHAKARCHI, RAMI. *Complex Analysis.*
Princeton University Press (2003)

[19] SUÁREZ, A., GUILLÉN, F. Y LANGA, J.A.. *Apuntes de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*
Asignatura del segundo curso del Grado en Matemáticas (2015/2016).

[20] SPIEGEL, MURRAY R.. *Transformadas de Laplace.* McGraw Hill (1970).

[21] SPIEGEL, MURRAY R.. *Ecuaciones diferenciales aplicadas.*
Prentice Hall (1981).

[22] THE MATHWORKS INC.. *Matlab, version 7.10.0.*
Natick, Massachusetts (2010).

[23] VRETBLAD, ANDERS. *Fourier Analysis and its applications.*
Springer, New York (2003).